

UNIVERSITÉ PARIS-EST

ÉCOLE DOCTORALE

SCIENCES, INGÉNIERIE ET ENVIRONNEMENT

Année 2014

Thèse de Doctorat

Spécialité : STRUCTURES ET MATÉRIAUX

présentée par :

QUOC-HUONG BUI

École des Ponts ParisTech

Mémoire de Thèse

TITRE

**Étude numérique de l'influence de la texture de chaussée sur la
résistance au roulement**

JURY

M. G. CAILLETAUD, Mines ParisTech, Rapporteur

M. A. LE BOT, École Centrale de Lyon, Rapporteur

M. J. CESBRON, IFSTTAR, Examineur

M. L. CHEVALIER, Université Paris-Est, Examineur

M. A. GAUDIN, PSA Peugeot Citroën, Examineur

Mme. F. ANFOSSO-LÉDÉE, IFSTTAR, Invitée

M. H.P. YIN, Université Paris-Est, Directeur de thèse

Remerciements

Ce travail de thèse est le résultat de trois années au sein de l'équipe Dynamique, UR Navier. La première personne que je tiens à remercier est mon directeur de thèse Monsieur Hai-Ping YIN, pour l'orientation, la confiance, la patience, l'accueil chaleureux, le précieux conseil et l'aide qui ont constitué un apport considérable sans lequel ce travail n'aurait pas pu être mené au bon port.

En second lieu, je tiens à remercier sincèrement Monsieur Julien CESBRON, qui, en tant qu'encadrant, s'est toujours montré à l'écoute et très disponible tout au long de la réalisation de ce mémoire, pour l'inspiration, l'aide et le temps qu'il m'a bien consacré et sans qui ce mémoire n'aurait jamais vu le jour.

Mes remerciements s'adressent également à Monsieur Luc CHEVALIER, qui m'a fait l'honneur de présider le jury de ma soutenance de thèse ainsi que Messieurs Alain LE BOT et Georges CAILLETAUD qui ont accepté d'être rapporteurs de ma thèse. Leurs rapports très détaillés ainsi que leurs remarques et questions très intéressantes ont suscité ma réflexion en ouvrant d'autres perspectives à mon travail. Je tiens également à remercier Monsieur Arnaud GAUDIN et Madame Fabienne ANFOSSO-LÉDÉE pour ses examinations de mon travail ainsi que ses questions et remarques qui sont autant pertinentes que constructives. Mes remerciements vont aux membres du jury pour l'intérêt qu'ils ont porté à ma recherche en acceptant d'examiner mon travail et de l'enrichir par leurs propositions.

Je tiens aussi à exprimer mon amitié à tous mes collègues de l'équipe Dynamique du Laboratoire Navier, à tous mes proches et amis qui m'ont toujours soutenu et encouragé au cours de ce travail.

Préambule

Titre : Étude numérique de l'influence de la texture de chaussée sur la résistance au roulement.

Résumé :

Le secteur des transports représente 50% de la consommation mondiale en produits pétroliers. Une part significative de l'énergie est dissipée par le fonctionnement de la suspension et par la déformation du pneu. La texture de surface de chaussée et son interaction avec le pneu jouent un rôle certain dans cette dissipation d'énergie. Le travail présenté dans ce mémoire est consacré à la modélisation du contact entre un pneu et une chaussée en conditions de roulement dans le but d'évaluer la résistance au roulement. Le choc d'une sphère sur un demi-espace viscoélastique est d'abord étudié. Ensuite, le contact viscoélastique d'un objet roulant sur une surface lisse est modélisé avec une suspension attachant l'objet roulant à une masse qu'il supporte. Enfin, une méthode multipoints linéarisée est proposée pour l'étude du roulement sur une surface rugueuse sans suspension dans un premier temps, et avec suspension dans un second temps. La condition de roulement est introduite. Les surfaces rugueuses sont soit des surfaces composées d'aspérités sphériques, soit des surfaces de chaussées réelles. Les résultats numériques font apparaître une dissymétrie dans la distribution de pression de contact dans la direction du roulement. La force de résistance au roulement, définie comme le couple par rapport à l'axe de l'essieu divisé par le rayon de la roue, est calculée à partir de la distribution de pression. L'influence de différents paramètres sur cette force tels que la vitesse de roulement, la taille des aspérités ainsi que la raideur de la suspension est analysée.

Mots clés : interaction pneu/chaussée, texture de chaussée, modélisation numérique, contact viscoélastique, résistance au roulement.

Titre : Numerical study of the influence of the road texture on the rolling resistance.

Abstract :

The transport accounts for about 50 percent of the fuel consumption. A significant proportion of energy is lost by the suspension and the deformation of the tyre. One of the important factors in the energy loss is the texture of the road and its interaction with the tyre. The present work deals with the numerical modelling of the contact between a tyre and a road in rolling conditions in order to evaluate the rolling resistance. First, the collision of a sphere and a viscoelastic halfspace is studied. Then the viscoelastic contact of a body rolling on an smooth surface is investigated with a suspension between a mass and the rolling body. Finally a linearised multipoint method is proposed for the study of the rolling contact on a rough surface first without suspension and then with a suspension. The rolling condition is introduced in the model. The rough surfaces are surfaces composed of spherical asperities or real road surfaces. Numerical results reveal an asymmetry in the distribution of the contact pressure in the rolling direction. The rolling resistance force, classically defined as the momentum opposing the rolling divided by the radius of the tyre, is calculated using the distribution of the contact pressure. The effects of different parameters on the rolling resistance force such as the rolling speed, the size of the asperities and the stiffness of the suspension are analysed.

Keywords : tyre/road interaction, road texture, numerical modelling, viscoelastic contact, rolling resistance.

Table des matières

Introduction	1
1 Étude bibliographique	3
1.1 Résistance au roulement	3
1.1.1 Définition de la résistance au roulement	3
1.1.2 Facteurs influant sur la résistance au roulement	4
1.1.3 Méthodes de mesure de la résistance au roulement	6
1.2 Modèles de contact pour la résistance au roulement	8
1.2.1 Cylindre rigide sur une surface viscoélastique	8
1.2.2 Courroie viscoélastique sur rouleau rigide	10
1.2.3 Sphère rigide sur une surface viscoélastique	12
1.3 Modèles de contact multipoints	13
1.3.1 Modèle analytique de contact ponctuel	14
1.3.2 Modèle de contact multipoints élastique	15
1.3.3 Modèle de contact multipoints viscoélastique	16
1.4 Conclusions	19
2 Choc entre une sphère et un demi-espace viscoélastique	21
2.1 Introduction	21
2.2 Choc entre deux sphères élastiques	23
2.2.1 Contact entre deux sphères élastiques	23
2.2.2 Choc entre deux sphères élastiques	23
2.3 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	24
2.3.1 Viscoélasticité linéaire	24
2.3.2 Contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	25
2.3.3 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastiques	26
2.4 Algorithme de résolution	26
2.5 Les résultats numériques	28
2.5.1 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace élastique	28
2.5.2 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	31
2.6 Conclusions	36
3 Roulement sur un massif semi-infini viscoélastique	37
3.1 Introduction	37
3.2 Contact viscoélastique avec roulement	38
3.3 Discrétisation du problème	40

3.4	Prise en compte de la suspension de la roue	42
3.5	Application à une sphère en roulement	44
3.5.1	Géométrie et matériaux	44
3.5.2	Convergence de la méthode	46
3.5.3	Résistance au roulement du système sans suspension	48
3.5.4	Résistance au roulement du système avec suspension	54
3.6	Conclusions	57
4	Approche multipoints linéarisée avec roulement	59
4.1	Problème de contact multi-aspérités	59
4.1.1	Formulation multipoints pour le contact multi-aspérités	59
4.1.2	Hauteur du pneu au cours du roulement	62
4.1.3	Moment, force et coefficient de résistance au roulement	62
4.1.4	Méthode de résolution par approche linéarisée	64
4.2	Validation du modèle	66
4.2.1	Contact pour un massif ayant la forme d'une sphère	66
4.2.2	Contact pour un massif ayant la forme d'un pneumatique	79
4.3	Conclusions	87
5	Contact multipoints avec la suspension	89
5.1	Equation et problèmes de roulement avec la suspension	89
5.2	Application aux surfaces régulières et à celle d'une chaussée réelle	92
5.2.1	Contact entre une sphère et une géométrie régulière	92
5.2.2	Contact entre un pneu et une géométrie régulière	97
5.2.3	Contact entre un pneu et une chaussée réelle	102
5.3	Conclusions	105
	Conclusion générale et perspectives	107
	Bibliographie	111

Table des figures

1.1	<i>Sources de dissipation d'énergie au niveau de la liaison roue/sol d'après [45].</i>	4
1.2	<i>Moyen de mesure de la résistance au roulement en laboratoire : rouleuse à volant interne de la BAST en Allemagne [51].</i>	6
1.3	<i>Exemple de mesure sur site de la résistance au roulement [50].</i>	7
1.4	<i>Modèle de contact entre un cylindre rigide et une surface viscoélastique (Nuttall et al. 2005 [38]).</i>	8
1.5	<i>Modèle de Maxwell généralisé [38].</i>	9
1.6	<i>Cylindre roulant sur une couche viscoélastique (Nuttall et al. 2005 [38]).</i>	10
1.7	<i>Modèle d'indentation et de résistance au roulement d'une courroie sur un rouleau [57].</i>	11
1.8	<i>Distribution de pression de contact à l'interface rouleau/courroie [57].</i>	12
1.9	<i>Discretisation de la sphère en éléments cylindriques (section en plan O_{xz} et projection sur le plan O_{xy}) (Zéhil et Gavin, 2013 [53]).</i>	13
1.10	<i>Contact pneumatique/chaussée approché par un massif semi-infini déformable en contact avec une surface rugueuse rigide (Cesbron 2007 [44]).</i>	14
1.11	<i>Contact entre deux corps de formes quelconques d'après Sameur [36].</i>	15
1.12	<i>Modèle de contact multipoints (d'après Cesbron 2007 [44]).</i>	15
1.13	<i>Configuration de la surface composée de sept aspérités sphériques (Dubois 2010 [52]).</i>	18
1.14	<i>Comparaison de la méthode multipoints avec la MIM pour la sphère centrale (Dubois 2010 [52]).</i>	18
1.15	<i>Comparaison de la méthode multipoints avec la MIM pour les sphères périphériques (Dubois 2010 [52].)</i>	19
2.1	<i>Contact entre une sphère et un demi-espace élastique [54].</i>	23
2.2	<i>Modèle de Kelvin-Voigt [49].</i>	24
2.3	<i>Choc élastique entre une sphère rigide avec un demi-espace élastique.</i>	29
2.4	<i>Courbe de convergence.</i>	29
2.5	<i>Influence de la vitesse de la sphère à la force normale au cours du choc.</i>	30
2.6	<i>Influence de la vitesse de la sphère à la valeur maximale de la force normale.</i>	31
2.7	<i>Contact viscoélastique dans le cas $k \approx 1$.</i>	33
2.8	<i>Contact viscoélastique dans le cas $k = 0,5$.</i>	34
2.9	<i>Courbe de perte d'énergie.</i>	35
2.10	<i>Courbe de convergence.</i>	35
3.1	<i>Cadres de coordonnées pour le problème de roulement.</i>	40

3.2	<i>Objet rigide roulant sur la chaussée avec introduction de la suspension.</i>	42
3.3	<i>Maillage de la surface lisse par des rectangles identiques.</i>	43
3.4	<i>Sphère roulant sur un massif semi-infini viscoélastique dans le cas où la pénétration $\delta = 4,2$ mm est imposée.</i>	44
3.5	<i>Modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt.</i>	45
3.6	<i>Force totale P en fonction du temps t pour différents nombres d'échantillons temporel n_t.</i>	46
3.7	<i>Pression de contact p sur l'axe x à l'instant $t = T$ pour différents nombres d'échantillons temporel n_t.</i>	47
3.8	<i>Convergence de la méthode pour différentes vitesses de roulement de la sphère.</i>	47
3.9	<i>Pression normale p suivant l'axe O_x à l'instant $t = T$.</i>	48
3.10	<i>Force de résistance au roulement F_R en fonction du temps t.</i>	49
3.11	<i>Pression normale p suivant l'axe O_x à l'instant $t = T$ pour différentes vitesses de roulement V.</i>	49
3.12	<i>Force de résistance au roulement F_{Rx} en fonction du temps t pour différentes vitesses.</i>	50
3.13	<i>Sphère roulant sur un massif semi-infini dont la surface est sinusoïdale.</i>	50
3.14	<i>Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n = 1$.</i>	51
3.15	<i>Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n = 2$.</i>	52
3.16	<i>Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n = 3$.</i>	52
3.17	<i>Distribution de la pression p à l'instant T.</i>	53
3.18	<i>Comparaison la distribution de la pression p à l'instant T pour les différentes surfaces en contact avec la sphère.</i>	53
3.19	<i>Force totale $P(t)$ et force de la résistance au roulement $F_R(t)$ lors de l'introduction de la suspension.</i>	54
3.20	<i>Distribution de la pression p à l'instant $t = T$.</i>	55
3.21	<i>Force de la résistance au roulement $F_R(t)$ et z dans le cas d'une sphère roulant avec suspension.</i>	55
3.22	<i>Distribution de la pression p à l'instant $t = T$ en présence de la suspension.</i>	56
3.23	<i>Force de la résistance au roulement F_R au cours du contact pour $n = 3$.</i>	56
4.1	<i>Contact entre un massif semi-infini et une surface rugueuse, d'après Dubois 2012 [52].</i>	60
4.2	<i>Déplacement $\delta_k(t)$ sur l'aspérité k.</i>	62
4.3	<i>Approche multipoints pour le contact pneumatique/chaussée avec roulement.</i>	63
4.4	<i>Massif semi-infini déformable de forme sphérique roulant sur une seule aspérité sphérique rigide à la vitesse V.</i>	66
4.5	<i>Géométrie de l'aspérité sphérique composant la surface de la chaussée.</i>	67

4.6	<i>Force normale $P_1(t)$ lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique aspérité.</i>	68
4.7	<i>Cycle de chargement/déchargement donnant P_1 en fonction δ_1 lors du roulement sur une seule aspérité sphérique.</i>	69
4.8	<i>Force résistance F_R lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique.</i>	69
4.9	<i>Coefficient μ_R lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique.</i>	70
4.10	<i>Influence de la vitesse V sur la force de résistance au roulement F_R pour un pneu de forme sphérique roulant sur une seule aspérité sphérique aspérité.</i>	71
4.11	<i>Surface composée de $N = 9$ aspérités sphériques en contact avec le massif semi-infini de géométrie sphérique.</i>	72
4.12	<i>Force de contact normale P_5 sur l'aspérité centrale 5 pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.</i>	73
4.13	<i>Force normale au cours du contact pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.</i>	74
4.14	<i>Force de résistance au roulement F_R pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.</i>	74
4.15	<i>Géométrie de la surface en contact avec la sphère.</i>	75
4.16	<i>Force normale P_5 sur l'aspérité 5.</i>	76
4.17	<i>Force normale sur chaque aspérité à l'instant $t \approx 4$ s.</i>	76
4.18	<i>Force de résistance au roulement F_R pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.</i>	77
4.19	<i>Forces normales P_k sur chaque aspérité k au cours du contact.</i>	77
4.20	<i>Géométrie de la surface composée d'un grand nombre d'aspérités sphériques en contact avec le pneumatique de forme sphérique.</i>	78
4.21	<i>Comparaison de la résistance au roulement obtenue par MIM et par méthode multipoints linéarisée.</i>	79
4.22	<i>Photographie du pneu lisse utilisé à gauche et profil transversal du pneu à droite (Cesbron, 2007) [44].</i>	79
4.23	<i>Visualisation de la surface du demi-pneu lisse reconstruite à partir du profil transversal à gauche et surface du pneumatique lisse potentiellement en contact avec la chaussée à droite (Cesbron, 2007) [44].</i>	80
4.24	<i>Géométrie de la surface en contact avec le pneu.</i>	81
4.25	<i>Force résistance F_R au cours du contact.</i>	81
4.26	<i>Force résistance F_R dépend du rayon r de l'aspérité.</i>	82
4.27	<i>Force normale à l'instant T suivre l'axe O_x</i>	82
4.28	<i>Principe du partitionnement [52].</i>	83

4.29	Contact ponctuel pour différentes aspérités de géométrie académique (cylindre, sphère, cône) et de géométrie quelconque [52].	84
4.30	Loi de contact normal pour une aspérité quelconque [52].	85
4.31	Surfaces de la chaussée A (à gauche) et E2 (à droite) [52]	85
4.32	Force résistance F_R au cours du contact.	86
4.33	Force de résistance au roulement F_R pour les différentes surfaces de chaussée.	86
4.34	Force normale P_{507} en fonction du temps sur l'aspérité 507 sur la surface de chaque chaussée.	87
5.1	Objet roulant sur la chaussée.	89
5.2	Géométrie de la surface en contact avec la sphère.	92
5.3	Force de résistance au roulement F_R au cours du contact	93
5.4	Déplacement du ressort Δ et de la sphère δ au cours du contact	93
5.5	Comparaison de la force de résistance au roulement F_R avec ou sans suspension.	94
5.6	Comparaison de la déformation δ avec ou sans suspension.	94
5.7	Comparaison de la force totale P_{totale} avec ou sans suspension.	95
5.8	Force de résistance au roulement F_R dans le cas où le ressort est très rigide.	95
5.9	Force normale P à l'instant T suivant l'axe $O - X$	96
5.10	Influence de la vitesse V de la sphère sur la valeur moyenne de la force de résistance au roulement F_{R-m} ($V = 2^{5-n}$ m/s).	96
5.11	Comparaison le contact élastique et viscoélastique à $V = 0,25$ m/s.	97
5.12	Force résistance F_R en fonction du temps au lieu de la hauteur z	98
5.13	Comparaison la force P_{totale} pour les deux cas : (a) surface de chaussée géométrie sinusoïdale - (b) hauteur $z = 0$	98
5.14	Déplacement du ressort Δ et du pneu δ au cours du contact.	99
5.15	Force normale P à l'instant T suivant l'axe $O - X$	99
5.16	Force de résistance au F_R au cours du contact pour différentes longueurs d'onde de chaussée.	100
5.17	Force résistance moyenne $\overline{F}_{R,moyenne}$ en fonction du nombre de la période de z	100
5.18	Force de résistance au roulement F_{R-m} en fonction de la raideur K de ressort.	101
5.19	Force de résistance au roulement F_R pour trois raideurs K du ressort.	101
5.20	Surfaces de la chaussée A (à gauche) et E2 (à droite) [52].	102
5.21	Force de résistance au roulement F_R et force normale totale P_{totale} au cours du contact.	103
5.22	Déplacement du ressort Δ et du pneu δ au cours du contact.	103
5.23	Comparaison de la déformation du pneu δ avec ou sans suspension.	104
5.24	Force de résistance au roulement F_R pour les différentes surfaces de chaussée.	104

Liste des tableaux

2.1	<i>Valeurs données dans le cas du choc entre une sphère rigide avec un demi-espace élastique.</i>	28
2.2	<i>Valeurs maximales du déplacement, de la vitesse et de la force pour le contact élastique.</i>	28
2.3	<i>Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact élastique.</i>	30
2.4	<i>Valeurs données dans le cas choc sphère rigide-espace viscoélastique.</i>	32
2.5	<i>Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact viscoélastique avec $k \approx 1$.</i>	33
2.6	<i>Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact viscoélastique avec $k = 0,5$.</i>	34
4.1	Valeur moyenne de la force résistance \overline{F}_R correspondant à chaque valeur du rayon r de l'aspérité.	82
4.2	Valeur maximale de la force normale P_{max} correspondant à chaque valeur du rayon r de l'aspérité.	82

Introduction

Le secteur des transports joue d'ores et déjà un rôle indispensable dans la mondialisation actuelle. Les modes de transport incluent l'aviation, le chemin de fer, le transport maritime, et bien entendu le transport routier avec ses spécificités et son rôle très important dans la société. Il est le seul mode de transport capable de fournir des services flexibles et complets aussi tous les autres modes de transports. En conclusion, il est le mode toujours disponible et présent partout. C'est pourquoi le transport routier est devenu irremplaçable pour la mobilité, la croissance et le développement économique et social.

En ce qui concerne la consommation de carburant, le secteur des transports représente 50% de la consommation mondiale en produits pétroliers et 21% des émissions de CO_2 . Le transport routier à lui seul représente 81% de la demande en énergie liée au transport. La réduction de la consommation de carburant et des émissions de gaz à effet de serre prend donc une dimension très importante, comme en témoignent les conclusions du Grenelle de l'Environnement.

La résistance au roulement est responsable de 20% de la consommation du véhicule. Sur un trajet plat, la dissipation d'énergie provient de trois processus : les pertes par frottement interne au sein du véhicule, la résistance aérodynamique et les pertes liées au contact de roulement entre le pneumatique et la chaussée. Au niveau du contact pneumatique/chaussée, la dissipation d'énergie est due au frottement entre le pneumatique et la chaussée, à la déformation viscoélastique du pneumatique, au fonctionnement des amortisseurs et à la viscoélasticité de la chaussée. Maîtriser la résistance au roulement du véhicule peut nous faire économiser du carburant et contribue à diminuer les émissions de gaz à effet de serre.

Le travail de thèse a pour but d'étudier l'influence de la texture de revêtement de chaussée sur les forces dynamiques de contact entre le pneu et la chaussée, notamment la force de résistance au roulement. L'étude est théorique (modélisation des forces de contact) et est comparée à des résultats classiques dans des cas simples. Le modèle de contact avec la suspension de la roue est également abordé. D'une façon plus précise, les objectifs de la thèse sont les suivants :

- les calculs dans les cas simples (comme le contact entre une sphère et une géométrie simple) sont d'abord effectués et comparés avec des résultats classiques pour valider le modèle du contact multipoints avec la condition de roulement. Ensuite, nous passons aux cas plus compliqués afin de traiter le problème plus réel d'un pneu roulant sur une chaussée.
- le problème de contact avec un système suspendu est également étudié pour prendre en compte le comportement d'un système ressort/amortisseur existant entre la voiture

et le pneu. Les études sont réalisées d'abord sur une surface plane et lisse, ensuite sur une surface avec une géométrie sinusoïdale et enfin sur une chaussée réelle.

Le mémoire de thèse est divisé en cinq chapitres, dont le contenu est précisé dans les paragraphes qui suivent.

L'étude bibliographique menée au premier chapitre aborde plusieurs aspects de la résistance au roulement. Après quelques explications générales sur la génération de la résistance au roulement et les méthodes pour la mesurer, les modèles de contact développés par diverses équipes de recherche sont présentés. Chaque modèle est expliqué en détail. La dernière partie du chapitre est consacrée à la présentation du modèle de contact par approche multipoints. Ce dernier donne une solution plus simple pour résoudre les problèmes de contact entre un massif déformable et une chaussée rigide qui se compose de plusieurs aspérités.

Au second chapitre, le problème de choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique sera étudié de façon semi-analytique. L'équation dynamique du mouvement de la sphère est couplée avec les équations établies à partir des expressions analytiques pour le contact viscoélastique. Les équations sont résolues numériquement et l'étude de la perte d'énergie au cours du choc est effectuée. L'influence de la vitesse initiale sur le résultat est aussi abordée.

Le troisième chapitre concerne la modélisation du contact d'un objet roulant sur une surface lisse. Une suspension entre l'objet roulant et la masse qu'il supporte est introduite. Le problème de contact viscoélastique sera transformé en une succession de problèmes équivalents à un problème élastique en supposant que les fonctions de fluage et de relaxation sont constantes pour un intervalle de temps suffisamment petit. Ces problèmes seront résolus numériquement en utilisant la méthode d'inversion de matrice et la force de résistance au roulement sera calculée à partir de la distribution de pression de contact. Le quatrième chapitre présentera une méthode linéarisée de l'approche multipoints en viscoélasticité pour le contact entre un objet et une surface rugueuse. La condition de roulement est introduite. La résolution du problème de contact permet de déterminer l'évolution des forces de contact sur chaque aspérité de la surface rugueuse et de calculer la force de résistance au roulement. Les surfaces rugueuses étudiées sont des surfaces composées d'aspérités sphériques et aussi des surfaces de chaussées réelles.

Enfin, dans le dernier chapitre, une suspension est introduite entre l'objet roulant et la masse qu'il supporte. Les équations dynamiques du mouvement sont ajoutées aux équations de contact présentées dans le précédent chapitre. La force de résistance au roulement sera calculée et les résultats numériques seront comparés avec différentes surfaces rugueuses et avec différentes valeurs de la raideur de la suspension.

Étude bibliographique

Sommaire

1.1	Résistance au roulement	3
1.1.1	Définition de la résistance au roulement	3
1.1.2	Facteurs influant sur la résistance au roulement	4
1.1.3	Méthodes de mesure de la résistance au roulement	6
1.2	Modèles de contact pour la résistance au roulement	8
1.2.1	Cylindre rigide sur une surface viscoélastique	8
1.2.2	Courroie viscoélastique sur rouleau rigide	10
1.2.3	Sphère rigide sur une surface viscoélastique	12
1.3	Modèles de contact multipoints	13
1.3.1	Modèle analytique de contact ponctuel	14
1.3.2	Modèle de contact multipoints élastique	15
1.3.3	Modèle de contact multipoints viscoélastique	16
1.4	Conclusions	19

1.1 Résistance au roulement

1.1.1 Définition de la résistance au roulement

L'énergie mécanique dégagée par la combustion du carburant dans le moteur d'un véhicule n'est pas intégralement transformée en énergie cinétique utilisable par le véhicule pour se déplacer. Une partie de cette énergie est perdue sous l'effet de différents processus, chacun pouvant être associé à un phénomène de résistance particulier. D'après [45], il est possible de lister :

- les pertes par frottement interne au sein du véhicule ;
- la résistance aérodynamique générée par le frottement de l'air sur le véhicule en déplacement ;
- les effets de changement d'altitude (transformation d'une partie de l'énergie mécanique en énergie potentielle de gravité) ;

– les pertes liées au contact au sol du véhicule.

C'est ce dernier type de pertes qu'on appelle la résistance au roulement (on définira plus clairement les équations pour calculer la résistance au roulement dans le chapitre 4). Si nous équipons notre voiture de pneumatiques à faible résistance au roulement, nous réduisons notre consommation de carburant et diminuons les rejets de CO_2 à chaque kilomètre. La Commission Européenne, qui souhaite améliorer la performance environnementale des véhicules, a pris en compte ces avantages : elle propose ainsi l'introduction obligatoire de pneus à faible résistance au roulement depuis de 2012 [55].

1.1.2 Facteurs influant sur la résistance au roulement

Conformément au principe de conservation de l'énergie, les processus physiques à l'origine de la résistance au roulement sont nécessairement associés à des phénomènes dissipatifs. La Commission Européenne [55] explique que les pneus à faible résistance au roulement permettront de faire baisser la consommation de carburant en diminuant la résistance au mouvement qui se manifeste lors de la rotation du pneumatique et qui est essentiellement causée par la déformation de la roue ou du pneu, ou par la déformation de la chaussée. La résistance au roulement dépend largement des matériaux dans lesquels la route et le pneumatique sont réalisés. La figure 1.1 montre les causes de dissipation d'énergie au niveau de la liaison entre un véhicule et le sol. Il existe de la dissipation d'énergie par frottement entre le pneumatique et la chaussée, par déformation du pneumatique, des amortisseurs et de la chaussée viscoélastique.

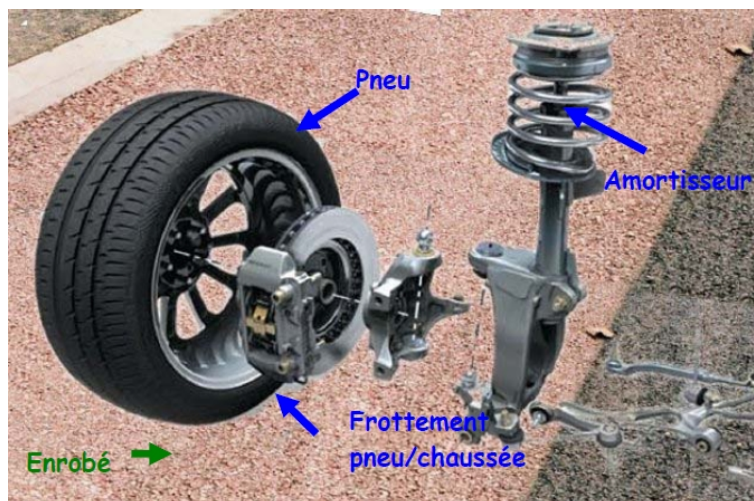


FIGURE 1.1 – Sources de dissipation d'énergie au niveau de la liaison roue/sol d'après [45].

1.1.2.1 Influence des propriétés de chaussée sur la résistance au roulement

Ces aspects sont décrits plus en détail dans [45] au quel le lecteur pourra se référer.

Influence de l'état de surface de la chaussée sur la résistance au roulement

L'influence de l'état de surface sur la résistance au roulement a été étudiée par divers auteurs [31][16][18][34][26][28][17]. Les études concluent que les longueurs d'ondes contribuant le plus à la dissipation d'énergie sont celles qui correspondent à des modes de résonance du véhicule et/ou des amortisseurs et de la structure du pneumatique. Elles indiquent aussi une décroissance de la résistance au roulement avec la taille des granulats et leur espacement.

Influence de la structure de la chaussée sur la résistance au roulement La viscoélasticité est la première source de dissipation. Il en résulte donc que, pour des propriétés de surface rigoureusement identiques, la résistance au roulement d'un véhicule sur une chaussée en enrobé bitumineux est plus importante que sur une chaussée en béton. La deuxième source de dissipation est l'influence de la raideur de la structure. En effet, qui dit chaussée plus souple dit zone de contact pneumatique/chaussée plus importante, et donc dissipation plus élevée dans le pneumatique.

1.1.2.2 Influence du pneumatique sur la résistance au roulement

Ces aspects sont décrits plus en détail dans [43] au quel le lecteur pourra se référer.

Influence de la pression de gonflage du pneumatique La résistance au roulement d'un pneumatique dépend en grande partie de la pression de gonflage. En effet, 1 bar de différence de pression par rapport à la pression nominale peut générer une différence de 5% sur la résistance au roulement, et donc une augmentation de la consommation de carburant. Pour diminuer leur résistance au roulement, il est important de gonfler les pneus à la pression recommandée en fonction de la charge de chaque essieu. De plus, le sous-gonflage réduit la longévité des pneumatiques.

Influence de la bande de roulement du pneumatique La bande de roulement génère 75% de la résistance au roulement du pneumatique, contre 25% pour les flancs et la zone talon. C'est aussi la raison pour laquelle gonfler le pneu à la bonne pression est très important pour permettre la juste déflexion de la bande de roulement et empêcher les mouvements inutiles qui produisent de la dissipation d'énergie et donc de la résistance au roulement.

1.1.3 Méthodes de mesure de la résistance au roulement

On distingue deux approches différentes pour l'évaluation de la résistance au roulement : les essais en laboratoire et les mesures sur site.

Essais en laboratoire La première approche consiste en la réalisation d'essais en laboratoire. Les dispositifs existants fonctionnent suivant le même principe : tout ou partie du segment en contact avec le sol du véhicule est fixé sur un bâti, équipé de capteurs de forces, et mis en mouvement relatif par rapport à un revêtement représentatif de la route (Figure 1.2). Ce type de dispositif est typiquement celui utilisé par les manufacturiers de



FIGURE 1.2 – *Moyen de mesure de la résistance au roulement en laboratoire : rouleuse à volant interne de la BAST en Allemagne [51].*

pneumatiques pour tester leurs produits, car il permet une maîtrise totale des paramètres extérieurs (vent, température, etc). Par contre, ce type d'approche ne permet pas de s'intéresser aux effets de l'uni ni à ceux de la structure de la chaussée sur la résistance au roulement. Elle présente un intérêt limité pour la route.

Essais sur site La seconde méthode de mesure, privilégiée par les industriels de la route, consiste à la réalisation des mesures de résistance au roulement *in situ*, sur des chaussées existantes par la Bundesanstalt für Strassenwesen (BAST) en Allemagne (Figure 1.3). Elle peut être réalisée de deux façons [50] :

- soit en suivant la vitesse du véhicule lors d'une décélération au point mort à partir d'une vitesse donnée. Sur la base de résultats expérimentaux, les forces de gravité et

de résistance au roulement sont supposées indépendantes de la vitesse V du véhicule, tandis que la force de traînée aérodynamique et les forces associées aux dissipations internes sont supposées proportionnelles à V^2 . Connaissant les autres paramètres de l'équation du mouvement (traînée aérodynamique, frottements internes, pente, masse du véhicule), une régression linéaire entre les données de décélération et de V^2 obtenues lors de l'essai permettent de remonter à une valeur de résistance au roulement [23][48].

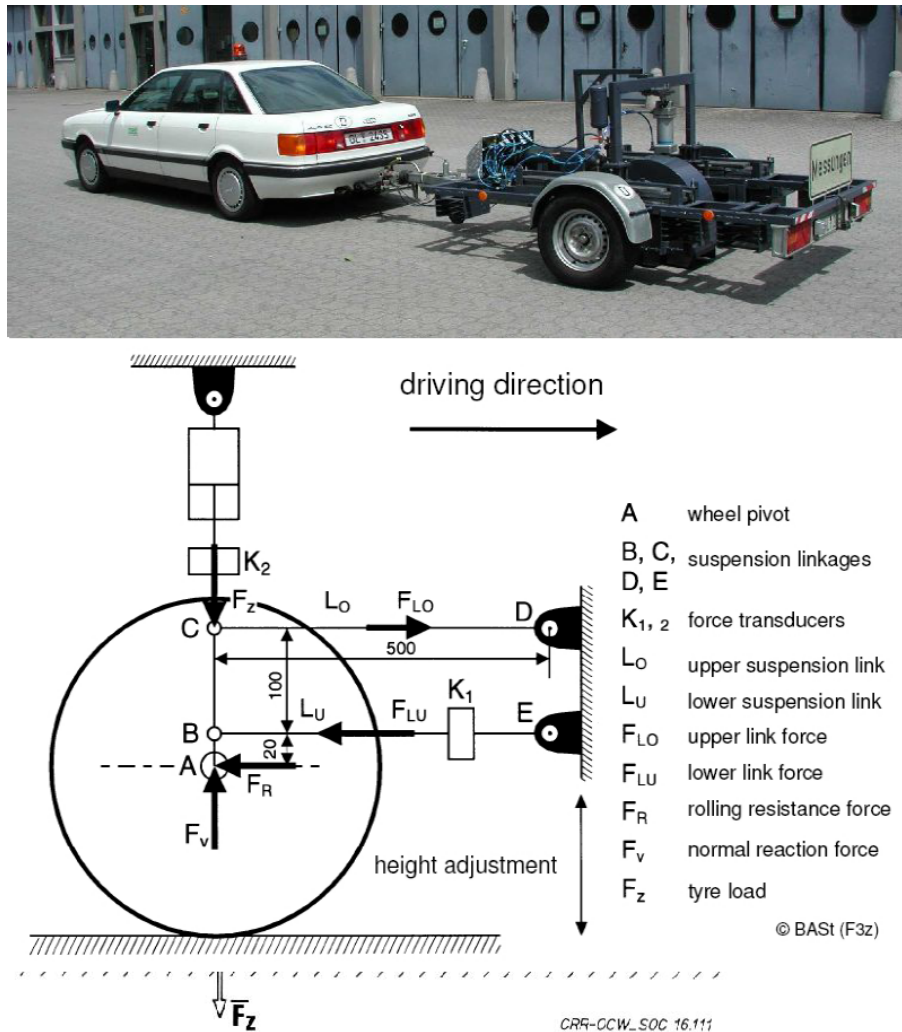


FIGURE 1.3 – *Exemple de mesure sur site de la résistance au roulement [50].*

- soit en un suivi de la résistance au roulement [22][27][39] ou de la consommation effective [33][41][27][28][39] à une vitesse constante.

La méthode de décélération au point mort, qui suppose de connaître le coefficient de traînée aérodynamique ainsi que les frottements internes au véhicule (paramètres difficiles à établir avec précision), constitue une méthode d'évaluation indirecte de la résistance au roulement. Elle est donc plus sensible aux perturbations extérieures inhérentes aux

mesures sur site. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle requiert de s'affranchir des perturbations extérieures [32] (variation du poids du véhicule, variation de la température de la chaussée, variation de la température ou pression des pneumatiques, vitesse du vent, dénivelé, frottements internes ...). Les auteurs montrent en particulier que ce type de mesure reste trop dépendant des autres sources de dissipations, en particulier du vent.

1.2 Modèles de contact pour la résistance au roulement

Dans cette partie, quelques modèles sont présentés pour étudier la résistance au roulement dans des configurations simples, par exemple le roulement d'un cylindre ou d'une sphère rigide sur un corps viscoélastique. A travers ces modèles, on aura les premières définitions de la résistance au roulement comme la force de résistance au roulement F_R ou bien le coefficient de résistance au roulement μ_R .

1.2.1 Cylindre rigide sur une surface viscoélastique

Le contact entre un cylindre rigide et une surface viscoélastique est modélisé de façon simplifiée dans [38] (figure 1.4). L'objet principal de cette approche est la détermination de la force de frottement due à l'hystérésis et la détermination des efforts normaux et tangentiels dans la zone du contact. Ce modèle est une extension d'un modèle linéaire viscoélastique. Il se compose du modèle de Maxwell (décrit par la suite) combiné avec le modèle fondation de Winkler [20]. Cette approche est utilisée pour l'analyse du frottement généré par perte hystérétique lors du roulement et pour étudier la relation entre la traction et le glissement. Le modèle prend en compte la courbure de la surface déformable.

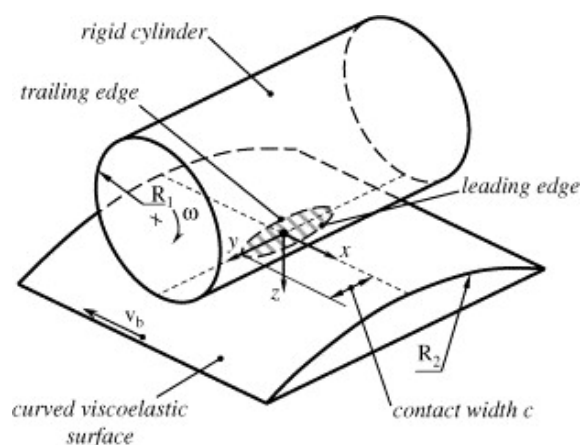


FIGURE 1.4 – *Modèle de contact entre un cylindre rigide et une surface viscoélastique (Nuttall et al. 2005 [38]).*

Le modèle de Maxwell généralisé est utilisé pour approcher le comportement viscoélastique de la surface déformable (Figure 1.5). Il se compose d'un ressort mis en parallèle avec un certain nombre de ressorts et d'amortisseurs. La représentation idéale avec un nombre infiniment grand d'éléments de Maxwell, ou ressort-amortisseur assemblés, est simplifiée par la limitation du nombre total d'éléments m . La contrainte totale dans ce modèle

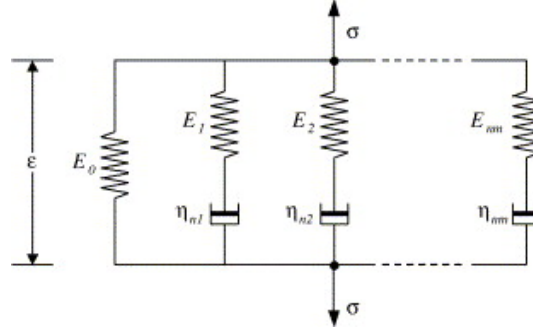


FIGURE 1.5 – *Modèle de Maxwell généralisé [38].*

est composée de la contrainte sur le ressort de raideur E_0 et des contraintes sur chaque ensemble ressort-amortisseur. On a la relation suivante entre la déformation totale et la pression exercée sur chaque ensemble :

$$\dot{\sigma}_i + \sigma_i \frac{E_i}{\eta_{ni}} = E_i \dot{\varepsilon} \quad (1.1)$$

où σ_i est la contrainte dans chaque ressort, E_i représente la raideur du ressort i et ε est la déformation totale. L'équation différentielle de chaque élément de Maxwell s'écrit :

$$\frac{\partial \sigma_i}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \sigma_i \frac{E_i}{\eta_{ni}} = E_i \frac{\partial \varepsilon}{\partial x} \frac{dx}{dt} \quad (1.2)$$

Considérons sur la figure 1.6 un cylindre roulant sur une couche viscoélastique d'épaisseur h à la vitesse angulaire ω . Il est chargé sur la couche avec une force F_z , provoquant une force de réaction F_n à sa base. Le centre du cylindre reste immobile tandis que le caoutchouc passe en-dessous avec une vitesse v_b . Le caoutchouc, modélisé par le modèle de Maxwell, établit un premier contact avec le cylindre au point $x = a$. Il passe par le plan de contact et perd le contact au point $x = -b$. Si la déformation dans la zone de contact est connue, il est possible de résoudre les équations différentielles individuelles (1.2) et de trouver la distribution de la pression de contact. Cette déformation peut être trouvée en supposant que le matériau de la couche viscoélastique est un seul matériau qui se déforme et que la zone de contact est faible par rapport à la courbure de la surface du cylindre et du caoutchouc, de sorte $x \ll R_1$ et $y \ll R_2$. La force de contact verticale totale et le

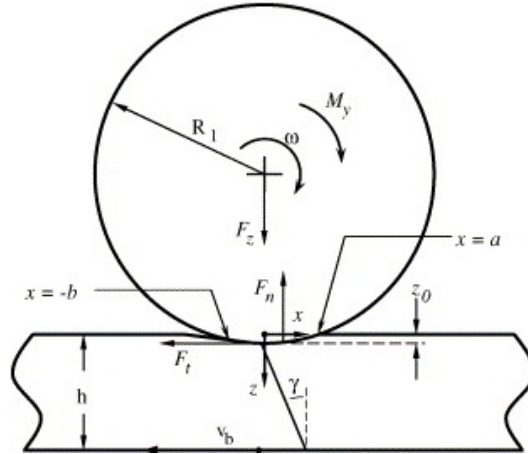


FIGURE 1.6 – *Cylindre roulant sur une couche viscoélastique (Nuttall et al. 2005 [38]).*

moment peuvent être calculés en intégrant :

$$F_z = 2 \int_0^c \int_{-b(y)}^{a(y)} \sigma(x, y) dx dy \quad (1.3)$$

où le point c représente l'intersection de l'axe O-X et de la limite de l'aire de contact.

$$M_y = 2 \int_0^c \int_{-b(y)}^{a(y)} x \sigma(x, y) dx dy \quad (1.4)$$

À partir du couple M_y , il est possible de définir une force de résistance au roulement :

$$F_r = \frac{M_y}{R_1} \quad (1.5)$$

où R_1 est le rayon du cylindre rigide. Le coefficient de résistance au roulement est alors défini par :

$$f_r = \frac{F_r}{F_z} \quad (1.6)$$

1.2.2 Courroie viscoélastique sur rouleau rigide

Le même type de problème de roulement est traité par [57] pour étudier le contact entre une courroie viscoélastique et un rouleau rigide (Figure 1.7).

Pour un matériau viscoélastique linéaire en une dimension, la relation entre la contrainte et la déformation est donnée par [57] :

$$\sigma(t) = \int_0^t \Psi(t-s) \dot{\epsilon}(s) ds \quad (1.7)$$

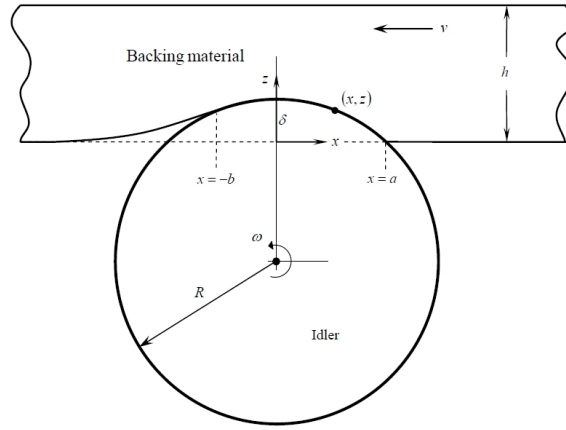


FIGURE 1.7 – *Modèle d'indentation et de résistance au roulement d'une courroie sur un rouleau [57].*

où $\Psi(t)$ est la fonction de relaxation, $\dot{\varepsilon}$ est la vitesse de déformation à l'instant t et σ est la contrainte. Si la profondeur d'indentation maximale δ est petite par rapport au rayon R , i.e. $\delta/R \ll 1$, l'indentation au point x sur la surface du rouleau est $z = \delta - x^2/2R$, où $\delta = a^2/2R$. On trouve alors :

$$\varepsilon = \frac{z}{h} = \frac{1}{h}(\delta - x^2/2R) = \frac{1}{2Rh}(a^2 - x^2) \quad (1.8)$$

En utilisant les relations $\dot{x} = -v$, $\dot{z} = -2x\dot{x}/2R = xv/R$ et la vitesse de déformation $\dot{\varepsilon} = \dot{z}/h = vx/Rh$, on obtient la contrainte en fonction de t et de x :

$$\sigma(t) = \int_0^t \Psi(t-s) \frac{v}{Rh} (a - vs) ds = -\frac{1}{Rh} \int_0^x \Psi\left(\frac{\xi - x}{v}\right) \xi d\xi \quad (1.9)$$

Pour une fonction de relaxation Ψ donnée, cette équation peut être intégrée de manière explicite pour déterminer la distribution de la pression de contact, comme le montre dans la figure 1.8.

A l'équilibre, la charge linéique totale W et la distribution de contrainte à l'interface doivent être équilibrées :

$$W = \int_{-b}^a \sigma(x) dx \quad (1.10)$$

Les grandeurs a et b ne peuvent pas être déterminées explicitement. Toutefois, une procédure itérative peut être utilisée déterminer a et b à partir de W .

Le moment M généré par la distribution de contrainte au centre du rouleau est donné par :

$$M = \int_{-b}^a x\sigma(x) dx \quad (1.11)$$

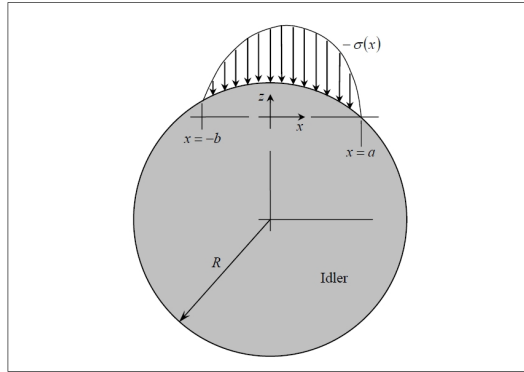


FIGURE 1.8 – *Distribution de pression de contact à l'interface rouleau/courroie [57].*

Ensuite, la force de résistance au roulement est donnée par :

$$F = \frac{M}{R} = \frac{\int_{-b}^a x\sigma(x)dx}{R} \quad (1.12)$$

et le coefficient de résistance au roulement est défini par :

$$f = \frac{M}{RW} = \frac{1}{R} \frac{\int_{-b}^a x\sigma(x)dx}{\int_{-b}^a \sigma(x)dx} \quad (1.13)$$

1.2.3 Sphère rigide sur une surface viscoélastique

Un modèle pour estimer la résistance au roulement pour une sphère (ou un cylindre) rigide roulant sur une couche viscoélastique d'épaisseur finie est développé dans [53]. Deux approches différentes sont proposées par les auteurs. Dans les deux cas, le frottement est négligé dans le modèle.

Approche quasi-3D sur la base d'un cylindre 2D À partir d'un modèle bidimensionnel présenté à l'origine par Qiu [42] pour le roulement d'un cylindre, Zéhil et Gavin [53] ont cherché la solution pour la résistance au roulement d'une sphère (problème 3D) roulant sur une couche viscoélastique (Fig. 1.9). L'idée est assez simple : une sphère de rayon R , se déplaçant dans la direction x à une vitesse V_s , est divisée le long de la direction transversale y en un nombre impair d'éléments cylindriques de largeur dy . Chaque tranche cylindrique a un rayon $R_c(y)$ et une pénétration $d_c(y)$ dans la couche déformable. En particulier, la tranche du milieu à $y = 0$ a un rayon $R_c(0)$ égal à R . Le contact sur chaque élément cylindrique est alors approché en utilisant un modèle bidimensionnel. La charge verticale P appliquée sur la sphère est distribuée sur les tranches cylindriques. La résistance au roulement totale sur la sphère est estimée en faisant la somme des résistances au roulement supportées par chacun de ces éléments cylindriques.

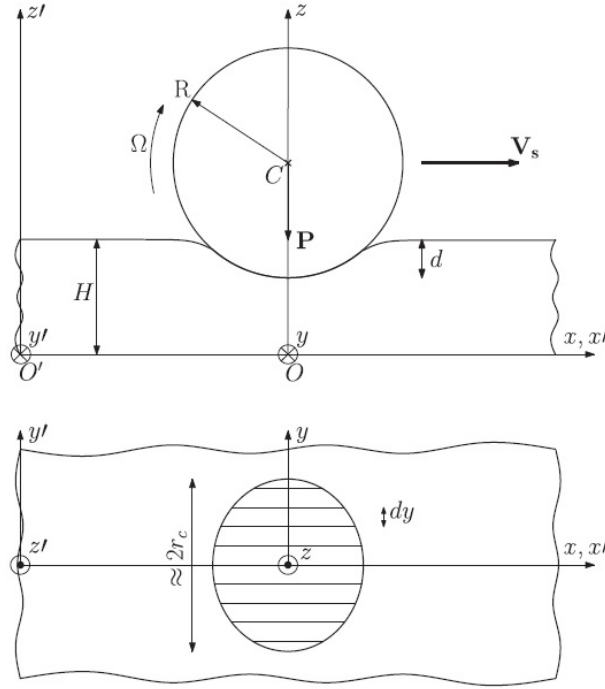


FIGURE 1.9 – *Discrétisation de la sphère en éléments cylindriques (section en plan O_{xz} et projection sur le plan O_{xy}) (Zéhil et Gavin, 2013 [53]).*

Approche directe par décomposition en séries de Fourier Dans la dernière partie de l'article [53], une approche 3D basée sur une décomposition du problème en séries de Fourier est proposée. Une comparaison des deux modèles quasi-2D et 3D montre que cette dernière approche permet d'estimer la résistance au roulement sans résoudre le problème de contact de roulement. En effet, une hypothèse simplificatrice sur la répartition des pressions de contact normal permet une réduction importante du temps de calcul. De plus, la méthode converge très rapidement.

1.3 Modèles de contact multipoints

Cette partie présente les modèles de contact multipoints qui sont utilisés jusqu'à maintenant pour la prévision du bruit de roulement. Pourtant ces modèles pourraient servir à étudier la résistance au roulement parce qu'ils intègrent à la viscoélasticité du matériau et permettent de simplifier les équations du problème de contact.

En collaboration entre l'ENPC et l'Ifsttar, un modèle de contact multipoints est développé depuis plusieurs années dans le cadre de recherches sur la prévision du bruit de contact pneumatique/chaussée. Le modèle a été initié au cours de la thèse à l'ENPC de Sameur (2004) [36], puis développé par la suite au cours des thèses à l'Ifsttar de Cesbron

(2007) [44] et Dubois (2012) [52]. Le modèle est tridimensionnel et se base sur une formulation analytique beaucoup moins lourde à mettre en œuvre que les modèles numériques classiques, comme la méthode des éléments finis par exemple. La bande de roulement du pneumatique est approchée par un massif semi-infini et la surface de la chaussée par un ensemble d'aspérités supposées parfaitement rigides (voir figure 1.10). Dans la zone

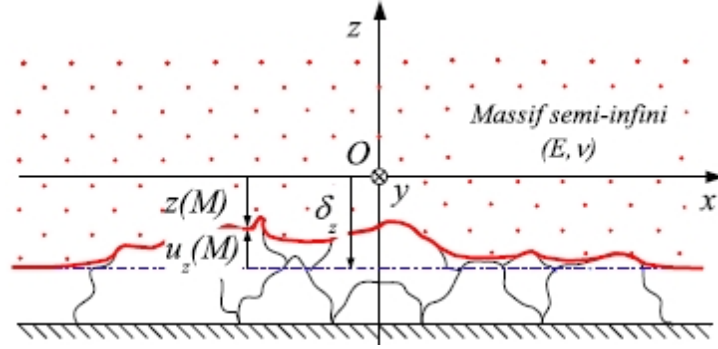


FIGURE 1.10 – *Contact pneumatique/chaussée approché par un massif semi-infini déformable en contact avec une surface rugueuse rigide (Cesbron 2007 [44]).*

de contact, la relation entre la force locale P_k et le déplacement local δ_k au sommet de chaque aspérité est supposée connue. Cette relation locale est appelée loi de contact et est ensuite utilisée pour résoudre le problème de contact multipoints à l'aide d'une méthode itérative.

1.3.1 Modèle analytique de contact ponctuel

Sameur (2004, [36]) décrit la loi de contact ponctuel entre la surface d'un massif semi-infini et une aspérité de forme quelconque à l'aide de la théorie du potentiel de force de Vilke (cf. figure 1.11). La relation entre la charge normale P appliquée et la pénétration δ prend alors la forme :

$$P = CE^*\delta^\gamma \quad (1.14)$$

dans le cas élastique avec $E^* = E/(1 - \nu^2)$ est appelé module équivalent et dans le cas viscoélastique :

$$P = C \int_0^t \psi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \delta^\gamma(\tau) d\tau \quad (1.15)$$

où C et γ sont des constantes qui dépendent de la géométrie de la pointe de contact et ψ est la fonction de relaxation du matériau viscoélastique.

Ces relations sont testées dans le cas du contact entre un plot de gomme et une seule pointe de forme simple qui peut être sphérique, conique ou pyramidale. Dans le cas du contact élastique, on trouve un résultat très cohérent avec les solutions analytiques connues comme

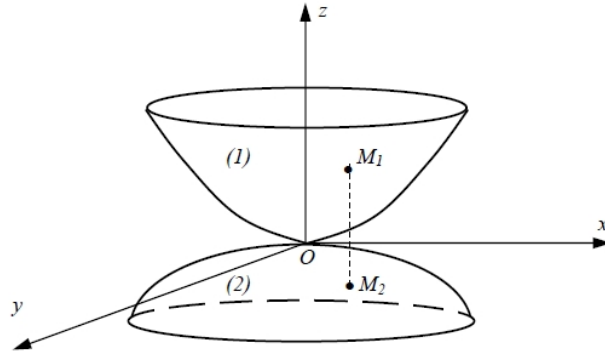


FIGURE 1.11 – *Contact entre deux corps de formes quelconques d'après Sameur [36].*

un contact avec une pointe de forme sphérique (Hertz, 1882 [2]) ou de forme conique (Love, 1939 [4]). Dans le cas du contact viscoélastique, une comparaison entre le modèle et l'expérience est également effectuée et donne un résultat acceptable.

1.3.2 Modèle de contact multipoints élastique

La modélisation par éléments finis et les mesures expérimentales montrent que l'application locale des résultats du modèle de contact ponctuel n'est pas valide pour la résolution du problème de contact entre un plot de caoutchouc et plusieurs pointes. Il existe en effet une interaction entre les pointes de contact dont il faut tenir compte pour obtenir des résultats corrects. Sameur [36] a donc proposé une méthode pour résoudre la problème de contact multipoints dans le cas élastique. Cette approche est reprise dans la thèse de Cesbron [44], figure 1.12.

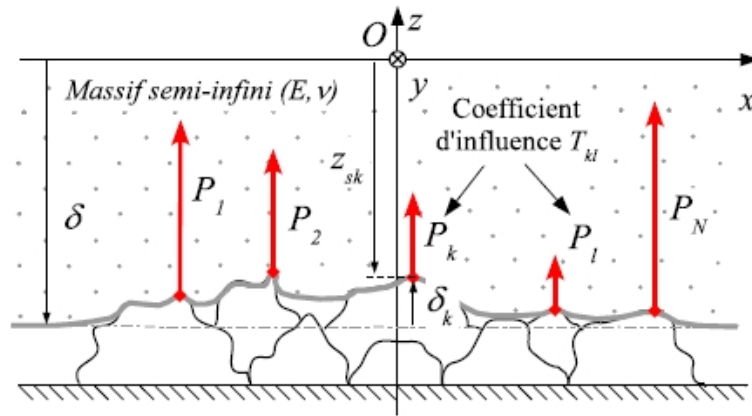


FIGURE 1.12 – *Modèle de contact multipoints (d'après Cesbron 2007 [44]).*

Pour décrire l'interaction entre les pointes de contact, ils utilisent la solution du problème

de Boussinesq (1885 [3]) donnant :

$$\forall (x, y) \in \Sigma, u(x, y) = \frac{P}{\pi E^* \sqrt{x^2 + y^2}} \quad (1.16)$$

où u est le déplacement normal à la surface Σ d'un massif semi-infini élastique, P est une force normale ponctuelle appliquée à l'origine et $E^* = E/(1 - \nu^2)$ est appelé module équivalent.

Dans le cas du contact multipoints, la zone de contact avec le massif semi-infini se compose de N pointes. Le problème est donc décrit par l'ensemble des forces ponctuelles P_k appliquées aux sommets des pointes, notés M_k et de coordonnées (x_k, y_k, z_k) . En conséquence, le déplacement au point M_k sur l'aspérité k dû aux autres forces que P_k , noté u_k , se calcule de la façon suivante :

$$\forall k \in [1, N], u_k = \sum_{l=1, l \neq k}^N T_{kl} P_l \quad (1.17)$$

où T_{kl} est le coefficient d'influence :

$$T_{kl} = \frac{1}{\pi E^* \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \quad (1.18)$$

Ce déplacement lié à l'interaction est ensuite introduit dans la loi de contact ponctuel pour le calcul de la force P_k , si bien que le problème multipoints s'écrit :

$$\forall k \in [1, N], P_k = C_k E^* (\delta - z_k - u_k)^{\gamma_k} \quad (1.19)$$

Cette dernière relation constitue un système de N équations non-linéaires à N inconnues P_k , qui est résolu à l'aide de la méthode itérative de Newton-Raphson.

1.3.3 Modèle de contact multipoints viscoélastique

1.3.3.1 Formulation multipoints pour le contact normal viscoélastique

À partir de l'approche multipoints pour le contact multi-aspérités en surface d'un massif semi-infini élastique (Cesbron, 2007) [44], Dubois (2010) [52] a étendu la méthode dans le cas d'un massif semi-infini viscoélastique.

Le déplacement $u(M, t)$ en point M à l'instant t dans la zone de contact peut se calculer sous la forme :

$$u(M, t) = \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\int_{\Sigma_l(\tau)} G(M, S) p(S, \tau) d\Sigma_l(\tau) \right] d\tau \quad (1.20)$$

où G est la fonction d'influence dans le cas viscoélastique, qui est supposée indépendante du temps et ϕ est la fonction de fluage. A l'intérieur de l'aire de contact, la condition de non-pénétration donne :

$$u(M, t) = z(M, t) - \delta(t) \quad (1.21)$$

Si on pose $\delta_k(t)$ le déplacement au sommet de l'aspérité k , on trouve :

$$\delta_k(t) = z_k^s - \delta(t) - \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1, l \neq k}^{N(\tau)} G_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (1.22)$$

où z_k^s représente la géométrie de la surface au sommet de l'aspérité k .

Ensuite, pour tenir compte du comportement viscoélastique dans le calcul des forces de contact P_k , Dubois [52] utilise la méthode de Radok [8] :

$$\forall k \in [1, N], P_k(t) = 0 \text{ si } \delta_k(t) \leq 0 \quad (1.23)$$

$$P_k(t) = \int_0^t \psi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} (f_k(\delta_k(\tau))) d\tau \text{ si } \delta_k(t) > 0 \quad (1.24)$$

où ψ est la fonction de relaxation et f_k est la loi de contact continue et dérivable sur $]0; \infty]$. Par exemple, pour une sphère en petite déformation, on a [2] :

$$f_k(\delta_k) = \frac{4}{3(1 - \nu)} \sqrt{R} \delta_k^{3/2} \quad (1.25)$$

Au final, le problème de contact normal viscoélastique multipoints à résoudre est alors, à chaque instant t , un système non-linéaire de $N(t)$ équations à $N(t)$ inconnues $P_k(t)$:

$$P_k(t) = \psi(0) f_k(z_k^s - \delta(t) - \bar{u}_{old}^k - \phi(0) \sum_{l=1, l \neq k}^{N(t)} G_{kl} P_l(t)) + \bar{P}_{old}^k \quad (1.26)$$

où \bar{u}_{old}^k et \bar{P}_{old}^k sont calculés à l'instant $t - dt$.

Dubois [52] utilise la méthode de discrétisation en temps ainsi que la méthode de Newton-Raphson pour résoudre ce problème dans le cas où la pénétration globale δ est imposée ou dans le cas où la charge normale totale P est imposée.

1.3.3.2 Validation de l'approche multipoints viscoélastique

Pour valider son modèle, Dubois a testé sa méthode sur plusieurs géométries de la surface de chaussée en contact avec le massif. Elle s'applique, d'abord, sur les géométries simples tels que une seule aspérité sphérique ou une géométrie composée de sept aspérités (cf. figure 1.13). Ensuite, cette méthode est mise en application sur les géométries plus compliquées comme une chaussée composée de plusieurs aspérités ou une chaussée réelle.

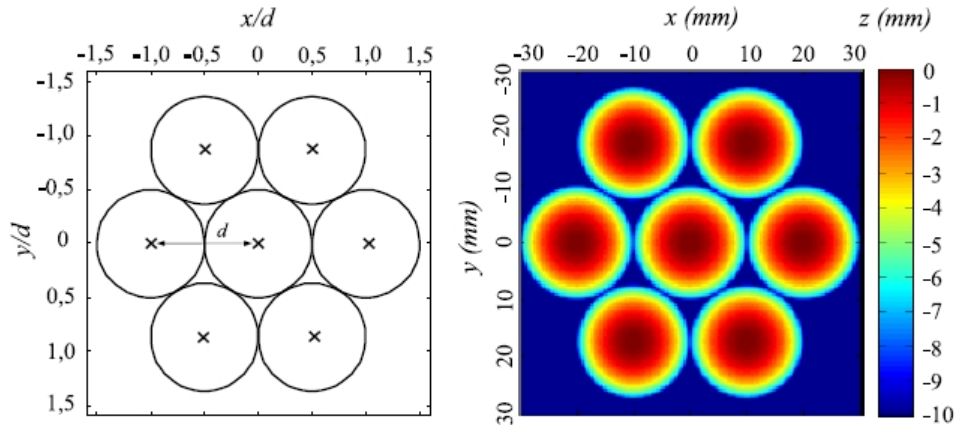


FIGURE 1.13 – Configuration de la surface composée de sept aspérités sphériques (Dubois 2010 [52]).

Ces calculs sont comparés aux résultats de la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM) [46] pour le cas du contact viscoélastique. La comparaison de la méthode multipoints à la MIM est bonne pour une seule aspérité sphérique et pour la géométrie simple composée de sept aspérités sphériques (figures 1.14 et 1.15). Cela lui permet d'appliquer avec succès l'approche multipoints pour le contact multi-aspérités entre une surface rugueuse et un massif semi-infini viscoélastique.

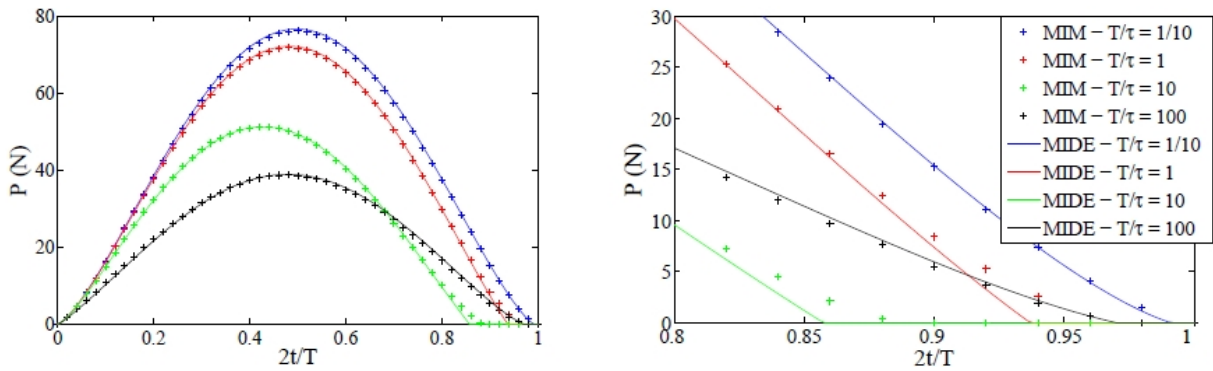


FIGURE 1.14 – Comparaison de la méthode multipoints avec la MIM pour la sphère centrale (Dubois 2010 [52]).

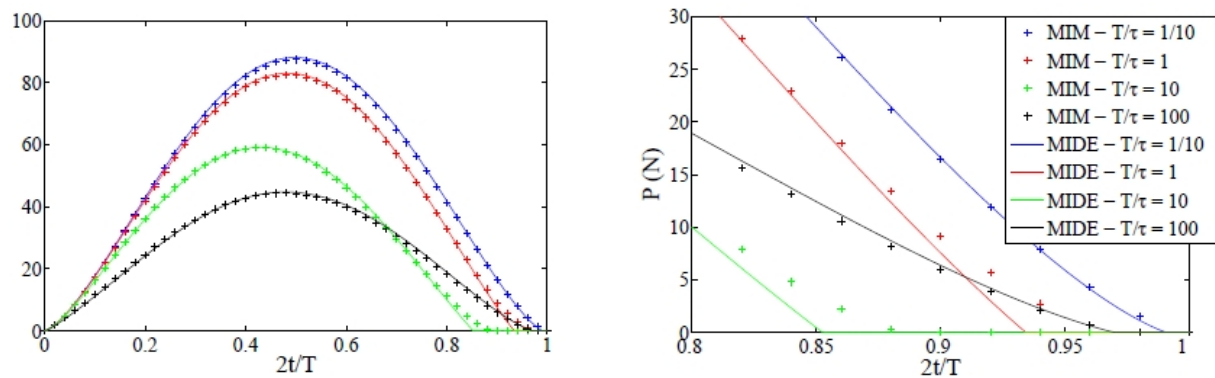


FIGURE 1.15 – *Comparaison de la méthode multipoints avec la MIM pour les sphères périphériques (Dubois 2010 [52].)*

1.4 Conclusions

Cette étude bibliographique montre que la texture de la chaussée a une influence directe sur les efforts de contact entre le pneumatique et la chaussée. Il y a donc une influence possible sur la résistance au roulement de l'état de surface de la chaussée et de sa structure.

Il existe des modèles servant à calculer les efforts de contact entre un corps rigide de géométrie simple (sphère ou cylindre) et un autre corps déformable au comportement élastique ou viscoélastique. Le cas viscoélastique permet d'estimer la force de résistance au roulement développée à l'interface entre les deux solides.

Pour le contact pneumatique/chaussée, un modèle multipoints a été proposé par Sameur (2004) et validé dans le cas des géométries simples. Cesbron (2007) a développé le modèle multipoints pour pouvoir traiter le contact entre un massif semi-infini élastique et une surface de chaussée réelle. Cette dernière lui permet une réduction de temps appréciable qui constitue un point très important quand le nombre d'aspérités dans la zone du contact est grand. Dubois (2011), quant à lui, a étendu le modèle multipoints au cas d'un massif semi-infini viscoélastique et a obtenu des résultats aussi bons que ceux dans le cas élastique.

Le modèle de contact multipoints est une première approche riche en information qui permet de résoudre le problème dans la plupart des configurations du contact. Néanmoins, il est nécessaire d'ajouter des conditions de roulement à ces modèles pour traiter le cas où un corps déformable roule sur une surface de chaussée rigide. De plus, dans le cas où une voiture roule sur une chaussée réelle, le problème de contact avec un système suspendu

a besoin d'être pris en compte parce qu'il existe un système ressort-amortisseur entre la voiture et le pneu.

Choc entre une sphère et un demi-espace viscoélastique

Sommaire

2.1	Introduction	21
2.2	Choc entre deux sphères élastiques	23
2.2.1	Contact entre deux sphères élastiques	23
2.2.2	Choc entre deux sphères élastiques	23
2.3	Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	24
2.3.1	Viscoélasticité linéaire	24
2.3.2	Contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	25
2.3.3	Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastiques	26
2.4	Algorithme de résolution	26
2.5	Les résultats numériques	28
2.5.1	Choc entre une sphère rigide et un demi-espace élastique	28
2.5.2	Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique	31
2.6	Conclusions	36

2.1 Introduction

Le contact entre le pneumatique et la chaussée peut être considéré comme des chocs entre les aspérités de la chaussée et les patins de gomme. Le phénomène plus simple est le choc entre une sphère rigide et un espace semi infini viscoélastique. Ce chapitre est consacré à l'étude numérique de choc viscoélastique entre des sphères.

Le mécanique des contacts est avant tout liée à Heinrich Hertz. En 1882, Hertz a résolu le problème impliquant un contact entre deux corps élastiques avec des surfaces courbes (voir l'article sur le contact de Hertz [2]). Ce résultat constitue encore aujourd'hui une des bases de la mécanique des contacts. Des travaux plus précoces concernant ce thème se réfèrent à J.V. Boussinesq [3] ainsi qu'à V. Cerruti [1]. Ce n'est qu'environ cent ans plus tard que Johnson [20], Kendall, et Roberts trouveront une solution similaire pour le

cas des contacts adhésifs (la JKR-Theory). Des progrès dans le domaine de la mécanique des contacts dans le milieu du XXème siècle peuvent être attribués aux noms de Bowden et Tabor [6]. Ils ont en effet découvert que, dû à la rugosité, la surface de contact réelle est en fait beaucoup plus petite que celle observée à l'œil nu. Cette découverte a modifié la direction de nombreuses études de tribologie de l'époque. Leurs travaux contribuèrent à de nombreuses théories sur les contacts entre les surfaces rugueuses.

On peut aussi citer dans les pionniers de ce domaine les travaux d'Archard (1957) [7], qui a démontré qu'également dans les contacts entre des surfaces flexibles et rugueuses, la surface de contact est à peu près proportionnelle à la force normale. D'autres contributions importantes sont liées à des noms tels que Greenwood et Williamson (1966) [12], Bush (1975) [15] et Persson (2002). Le résultat principal de leurs travaux est que, si la surface réelle de contact d'une surface rugueuse est en général proportionnelle à la force normale, dans des conditions de microcontact (pression, dimension), elle ne dépend que très peu de cette force.

Aujourd'hui, la plupart des études sur la mécanique des contacts s'effectue avec des programmes de simulation qui sont basés sur la méthode des éléments finis ou la méthode des moments.

Il existe un grand nombre de recherches scientifiques à ce sujet, quelques un se trouvent dans les livres de Laursen (2002) [35] et Wriggers (2002) [56] qui couvrent aussi les bases de la mécanique du contact numérique.

L'objectif de cette étude est l'analyse du choc entre une sphère élastique avec un bloc visco-élastique. La solution classique du problème de contact viscoélastique entre une sphère rigide et un demi espace visco-élastiques par Lee et Radok [9], en utilisant le principe de correspondance, ne convient pas pour le déchargement, car il conduit à des pressions restant en dehors de la zone de contact. La solution pour le déchargement a été fournie par Ting [13] et Graham [14], qui ont montré que, dans un certain sens, le comportement pendant la période où la zone de contact est supérieure à la valeur actuelle doit être ignorée. Cela conduit à une simple (bien qu'instable d'un point de vue de l'algèbre) procédure pour trouver la relation entre la zone de contact et la charge (voir Ting [13] ou Johnson [20]), et à une équation impliquant les différenciations et une intégration répétées afin de déterminer la variation de l'approche. Les intégrales répétées semblent avoir découragé les chercheurs, en ce sens qu'il semble que ni Ting, ni ses successeurs ont pris soin d'évaluer l'équation, même si bien sûr une connaissance du comportement de déchargement est essentielle pour le calcul de la dissipation d'énergie.

Toutefois, étant donné l'explication de Ting du mécanisme de contact viscoélastique, l'utilisation du principe de correspondance et de la transformée de Laplace est facilement évité et une méthode relativement simple de la solution pour une sphère rigide peut être résolu par la superposition de la solution pour l'indentation par poinçons circulaires de différents rayons convenables [25]. Surtout, cela conduit à une forme beaucoup plus simple d'équa-

tion pour le cas le plus habituel d'un chargement simple et d'un cycle de déchargement. La solution initialement établie par Ting a été récemment simplifiée par Williamson [12]. Cette écriture simplifiée sera la base de l'étude sur le choc viscoélastique présentée dans ce chapitre.

2.2 Choc entre deux sphères élastiques

2.2.1 Contact entre deux sphères élastiques

Le contact entre deux sphères élastiques est étudié à l'origine par Hertz. Si les deux sphères ont leurs rayons R_1 et R_2 et leurs modules d'Young E_1 et E_2 , alors la relation entre la force de contact et l'interpénétration est la suivante :

$$P(t) = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{\frac{3}{2}}(t) \quad (2.1)$$

et la zone de contact de rayon :

$$a(t) = \sqrt{R\delta(t)}$$

où

$$\frac{1}{R} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$$

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

E_1 et E_2 ainsi que ν_1 et ν_2 sont respectivement les modules d'élasticité et les coefficients de Poisson des deux corps. δ est le déplacement.

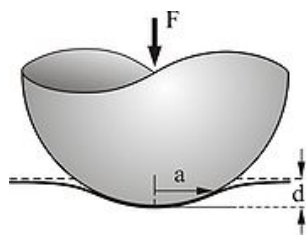


FIGURE 2.1 – Contact entre une sphère et un demi-espace élastique [54].

2.2.2 Choc entre deux sphères élastiques

Les deux sphères élastiques, de masses m_1 et m_2 , se déplacent avec des vitesses v_1 et v_2 le long de leur ligne des centres où ils se heurtent à O. Durant l'impact, en raison d'une déformation élastique, leurs centres se rapprochent d'un déplacement δ .

Leur vitesse relative est $v_2 - v_1 = d\delta/dt$ et la force entre elles à tout instant est $P(t)$. On a :

$$P = m_1 \frac{dv_1}{dt} = -m_2 \frac{dv_2}{dt} \quad (2.2)$$

ou bien :

$$-\frac{m_1 + m_2}{m_1 m_2} P = \frac{d}{dt}(v_2 - v_1) = \frac{d^2 \delta}{dt^2}$$

Avec la relation entre P et δ :

$$P = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{3/2} = K \delta^{3/2} \quad (2.3)$$

Si on pose :

$$\frac{1}{m} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$$

On trouve finalement :

$$m \ddot{\delta} = -K \delta^{3/2} \quad (2.4)$$

2.3 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique

2.3.1 Viscoélasticité linéaire

On suppose que l'application d'une contrainte $\sigma(0)$ d'un solide produit une déformation $\epsilon(t)$ composée d'une réponse immédiate élastique suivie d'une augmentation progressive avec le temps ("glissement élastique"). Le comportement est décrit par une fonction de fluage $\Phi(t)$ qui donne la réponse à une augmentation de contrainte unitaire. Une forme simple souvent utilisé est le modèle de Kelvin-Voigt, un ressort en parallèle avec un amortisseur, la paire en série avec un deuxième ressort.

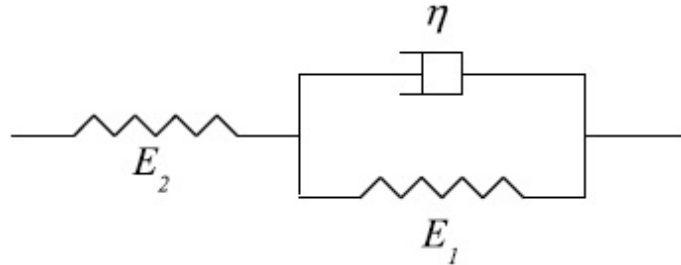


FIGURE 2.2 – Modèle de Kelvin-Voigt [49].

$$\Phi(t) = \frac{1}{E_\infty} \{1 - (1 - k) \exp(-t/T)\} \quad (2.5)$$

où $E_\infty = (E_1 E_2)/(E_1 + E_2)$ et $E_0 = E_2$. La réponse immédiate est $\Phi(0) = (k/E_\infty) \equiv 1/E_0$ et $k = E_\infty/E_0$.

La réponse à des déformations unitaires est la relaxation de module $\Psi(t) : \sigma(t) = \epsilon(0)\Psi(t)$. Il est facile de montrer que pour le trois-élément solide :

$$\Psi(t) = E_\infty \left\{ 1 + \frac{1-k}{k} \exp(-t/kT) \right\} \quad (2.6)$$

(Plus généralement, si la transformée de Laplace du fluage et la relaxation sont les fonctions $\bar{\Phi}(p)$ et $\bar{\Psi}(p)$ alors $p\bar{\Phi}(p)$ est l'inverse de $p\bar{\Psi}(p)$).

Un solide viscoélastique peut posséder des fonctions de relaxation et de fluage, l'une donne la réponse en cisaillement et l'autre la réponse à la contrainte hydrostatique, mais dans les problèmes de contact élastique le seul paramètre élastique en cause est la déformation plane de module $E^* \equiv E/(1 - \nu^2)$.

Notez que le rapport k des deux modules et aussi le rapport des deux constantes de temps sont souvent très petits, de sorte que la réponse de relaxation à un accroissement de la déformation est beaucoup plus rapide que la réaction en fluage à une augmentation de la contrainte.

Ainsi, la superposition peut être utilisée pour trouver la réponse à une séquence de tranches de contrainte ou d'une séquence d'incrémentes de déformation.

Nous écrivons $\sigma(t) = \sigma(0) + \int_0^t (d\sigma/dt') dt'$ et ajoutons la réponse à chaque terme

$$\epsilon(t) = \sigma(0)\Phi(t) + \int_0^t \frac{d\sigma}{dt'} \Phi(t-t') dt' \quad (2.7)$$

De la même façon :

$$\sigma(t) = \epsilon(0)\Psi(t) + \int_0^t \frac{d\epsilon}{dt'} \Psi(t-t') dt' \quad (2.8)$$

Fait important, ces deux rapports constituent une paire de transformées de sorte que pour toute paire de fonction :

si :

$$f(t) = g(0)\Phi(t) + \int_0^t \frac{dg}{dt'} \Phi(t-t') dt' \quad (2.9)$$

donc :

$$g(t) = f(0)\Psi(t) + \int_0^t \frac{df}{dt'} \Psi(t-t') dt' \quad (2.10)$$

2.3.2 Contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique

Les solutions analytique du contact viscoélastique a été établit à l'origine par Ting [13]. Elles ont été récemment simplifiées par Wiliamson [12] et présentées par la suite :

1. Pour la période du chargement :

$$\delta(t) = \frac{a^2(t)}{R} \quad (2.11)$$

$$P(t) = \frac{4}{3} \frac{E'_\infty}{R} \int_{t'=0}^t \frac{\partial a^3(t')}{\partial t'} \{\Psi(t-t')\} dt' \quad (2.12)$$

où l'expression de $\Psi(t)$ est la suivante :

$$\Psi(t) = E_\infty \left\{ 1 + \frac{1-k}{k} \exp(-t/kT) \right\}$$

2. Pour la période du déchargement :

$$R\delta(t) = a^2(t_1) + \int_{\eta=t_1}^{t_m} \frac{\partial a^2}{\partial \eta} G(t-\eta, \tau(\eta) - \eta) d\eta \quad (2.13)$$

$$P(t) = \frac{4}{3} \frac{E'_\infty}{R} \int_{t'=0}^{t_1} \frac{\partial a^3(t')}{\partial t'} \{\Psi(t-t')\} dt', \quad t > t_m \quad (2.14)$$

où t_m est le temps où le rayon de contact est à son maximum, t_1 est le temps à laquelle le poinçon en cours de rayon $a(t)$ été appliquée, tandis que $\tau(\eta)$ est le moment où le poinçon d'un rayon $a(\eta)$ a été retiré.

Et pour les trois-élément de solide, $G(t/\tau)$ est facilement évalué analytiquement :

$$G(t, \tau) = (1-k)[1 - \exp\{-\tau/kT\}] \exp\{-(t-\tau)/T\} \quad (2.15)$$

2.3.3 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastiques

Pour la modélisation du phénomène de choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique, on reprend les équations pour le contact élastique en ajoutant l'équation fondamentale de la dynamique $P(t) = m\ddot{\delta}(t)$. Les autres équations de ce problème se trouvent comme dans la partie précédemment "Contact entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique". Dans ce cas, les conditions initiales sont : $\delta_0 = 0$, $\dot{\delta}(0) = v(0)$ avec v est la vitesse de la sphère.

2.4 Algorithme de résolution

Dans cette section, un algorithme de résolution des équations qui gouvernent le choc élastique et le choc viscoélastique sera présenté.

Les valeurs de : $\delta(t_i)$, $\dot{\delta}(t_i)$, $\ddot{\delta}(t_i)$ avec $i \in [0, n-1]$ sont supposées connues.

On va calculer les valeurs à l'instant t_n .

D'après le développement de Taylor, on a :

$$\delta(t_n) \approx \delta(t_{n-1}) + \dot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2}\ddot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})^2 \quad (2.16)$$

$$\dot{\delta}(t_n) \approx \dot{\delta}(t_{n-1}) + \ddot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \quad (2.17)$$

et on a de plus :

$$\ddot{\delta}(t_n) = -\frac{P(t_n)}{m} \quad (2.18)$$

On traitera les exemples suivants :

1. Choc entre une sphère élastique et un demi-espace élastique :

$$P(t) = \frac{4}{3}E^*\sqrt{R}\delta^{3/2}(t) \quad (2.19)$$

2. Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique :

- Pour la période de chargement : ($t \leq t_m$: l'instant où le rayon du contact est maximal)

$$P(t) = \frac{4}{3}\frac{E'_\infty}{R}\int_0^t \Psi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}a^3(\tau)d\tau \quad (2.20)$$

avec $a^2(t) = R\delta(t)$, donc :

$$P(t) = \frac{4}{3}\sqrt{R}E'_\infty\int_0^t \Psi(t-\tau)d(\delta)^{3/2} \quad (2.21)$$

On fait une incrémentation en temps à pas constant :

$$P(t_n) \approx \frac{4}{3}\sqrt{R}E'_\infty\sum_{i=0}^{n-1}\Psi(t_n - t_i) [\delta^{3/2}(t_{i+1}) - \delta^{3/2}(t_i)] \quad (2.22)$$

- Pour la période du déchargement : ($t \geq t_m$)

$$P(t) = \frac{4}{3}\frac{E'_\infty}{R}\int_0^{t_1} \Psi(t-\tau)\frac{d}{d\tau}a^3(\tau)d\tau \quad (2.23)$$

avec $t_1 < t_m$ et $a(t) = a(t_1)$

On fait une incrémentation en a (rayon de la zone de contact) à pas constant :

$$R\delta(t) \approx a^2(t_i) + \sum_{k=i}^{m-1} (a_{k+1}^2 - a_k^2) G(t - t_k, \tau(t_k) - t_k) \quad (2.24)$$

avec

$$G(t, \tau) = (1 - k)[1 - \exp\{-\tau/kT\}]\exp\{-(t - \tau)/T\} \quad (2.25)$$

2.5 Les résultats numériques

2.5.1 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace élastique

Les paramètres utilisés dans la simulation numérique sont donnés dans le tableau 2.1 où :

- r , m , E_1 , ν_1 sont le rayon, la masse, le module d'élasticité et le coefficient de Poisson respectivement de la sphère.
- $\delta(0)$, $\dot{\delta}(0)$: le déplacement et la vitesse de la sphère avant le choc.
- E_2 , ν_2 : le module d'élasticité et le coefficient de Poisson du demi-espace.

r (m)	0,01
m (kg)	0,033
E_1 (Pa)	∞
E_2 (Pa)	$5,00E + 06$
ν_1	0,3
ν_2	0,3
$\delta(0)$ (m)	0
$\dot{\delta}(0)$ (m/s)	5

TABLEAU 2.1 – Valeurs données dans le cas du choc entre une sphère rigide avec un demi-espace élastique.

En utilisant l'algorithme de la discrétisation, on a :

$$\delta(t_n) \approx \delta(t_{n-1}) + \dot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) + \frac{1}{2}\ddot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1})^2 \quad (2.26)$$

$$\dot{\delta}(t_n) \approx \dot{\delta}(t_{n-1}) + \ddot{\delta}(t_{n-1})(t_n - t_{n-1}) \quad (2.27)$$

$$\ddot{\delta}(t_n) = -\frac{4}{3} \frac{E^* \sqrt{R} \delta^{3/2}(t_n)}{m} \quad (2.28)$$

Les résultats pour le déplacement δ , la vitesse V et la force normale P sont montrés par la figure 2.3 avec leur valeur normalisées pour les valeurs maximales respectives (Tableau 2.2)

δ_{max} (m)	v_{max} (m/s)	P_{max} (N)
0,004572	5	227,9

TABLEAU 2.2 – Valeurs maximales du déplacement, de la vitesse et de la force pour le contact élastique.

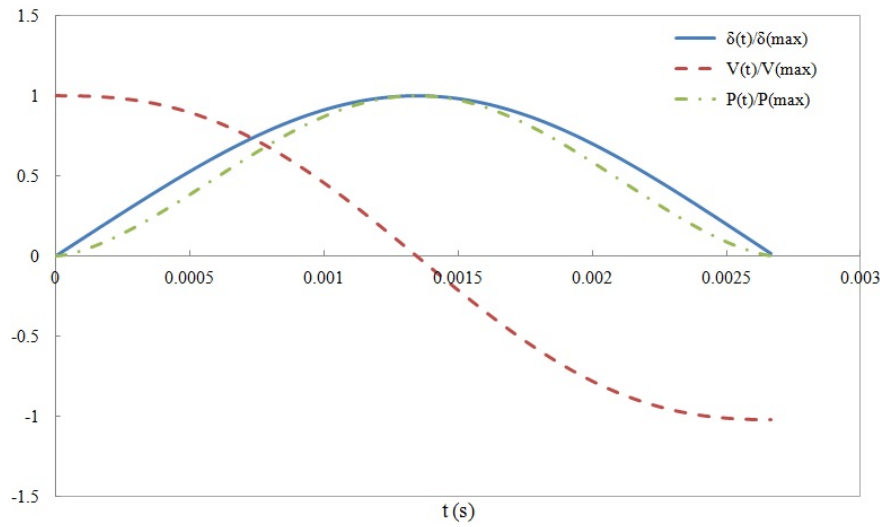


FIGURE 2.3 – Choc élastique entre une sphère rigide avec un demi-espace élastique.

On remarque que le déplacement et la force croissent jusqu'à leur valeur maximale puis décroissent, alors que la vitesse décroît jusqu'à la valeur nulle puis croît mais dans le sens inverse jusqu'à sa valeur initiale. L'énergie cinétique et la quantité de mouvement sont donc conservées.

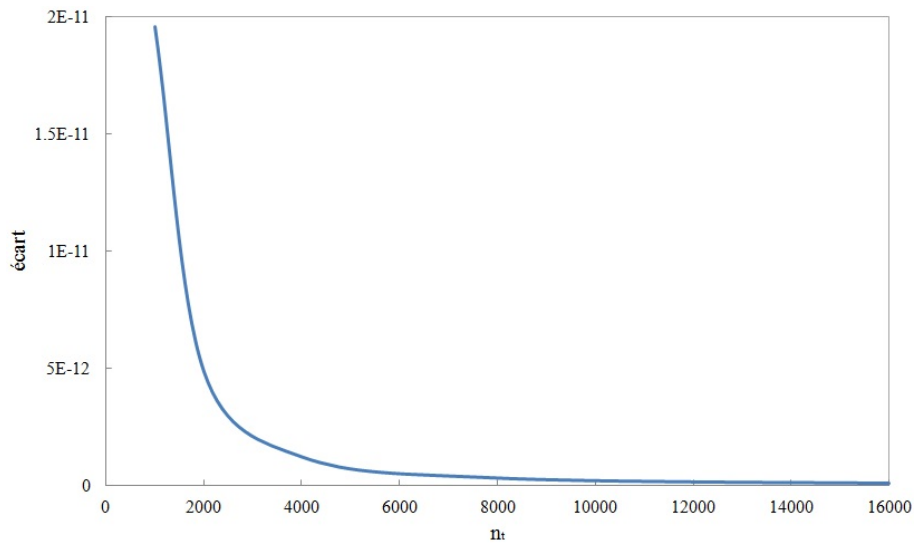


FIGURE 2.4 – Courbe de convergence.

La convergence de cette méthode a été étudiée en calculant l'écart de δ en fonction du nombre de pas de temps n_t pendant la durée du choc (Figure 2.4).

$$\text{écart} = \frac{\sum \Delta\delta(t_i)}{n_t} \quad (2.29)$$

où $\Delta\delta$ est l'écart de δ à l'instant t_i entre deux valeurs différentes de n_t . On remarque que la courbe de l'écart tend vers zéro rapidement quand le nombre de pas de temps augmente jusqu'à 5000.

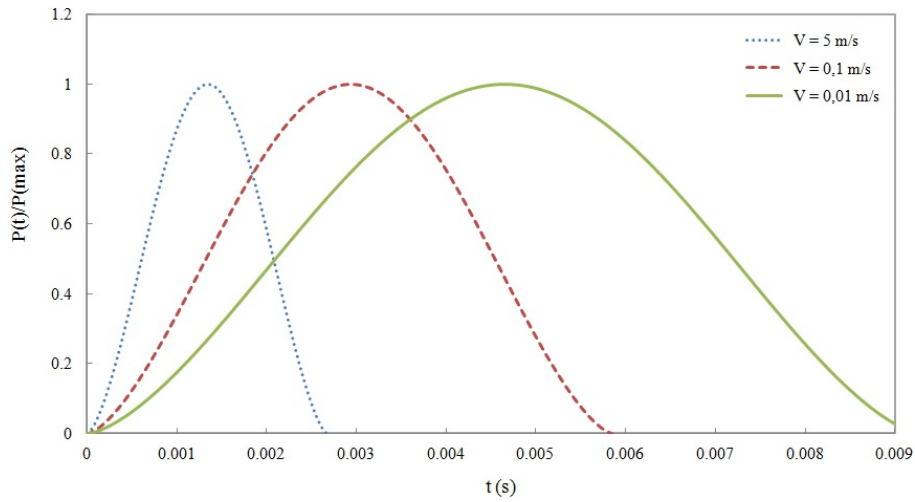


FIGURE 2.5 – Influence de la vitesse de la sphère à la force normale au cours du choc.

Pour étudier l'influence de la vitesse de la sphère sur le résultat, on a testé à trois vitesses : $V = 5 \text{ m/s}$, $V = 0,1 \text{ m/s}$ et $V = 0,01 \text{ m/s}$ (Figure 2.5). Donc on trouve que, dans ce cas, pour le choc entre une sphère rigide avec un demi-espace élastique, les courbes de la force normale au cours du choc sont symétriques même si on change la vitesse de la sphère. Pourtant, quand la vitesse de cette sphère diminue, la valeur maximale de cette force est aussi diminuée tandis que le temps du choc est augmenté. Le tableau 2.3 montre cette remarque.

$v_0 \text{ (m/s)}$	$t \text{ (s)}$	$\delta_{max} \text{ (m)}$	$v_{max} \text{ (m/s)}$	$P_{max} \text{ (N)}$
5	0,0027	0,0046	5	227,9
0,1	0,0059	0,0002	0,1	2,07
0,01	0,009	$3,17e^{-5}$	0,01	0,13

TABEAU 2.3 – Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact élastique.

La figure 2.6 nous montre l'influence de la vitesse V de la sphère à la valeur maximale P_{max} de la force au cours du choc où $V = 2^{-n}$. Le résultat nous montre que, quand la vitesse de la sphère est très petite, la force normale P est quasi-nulle et le choc entre les deux corps est négligeable.

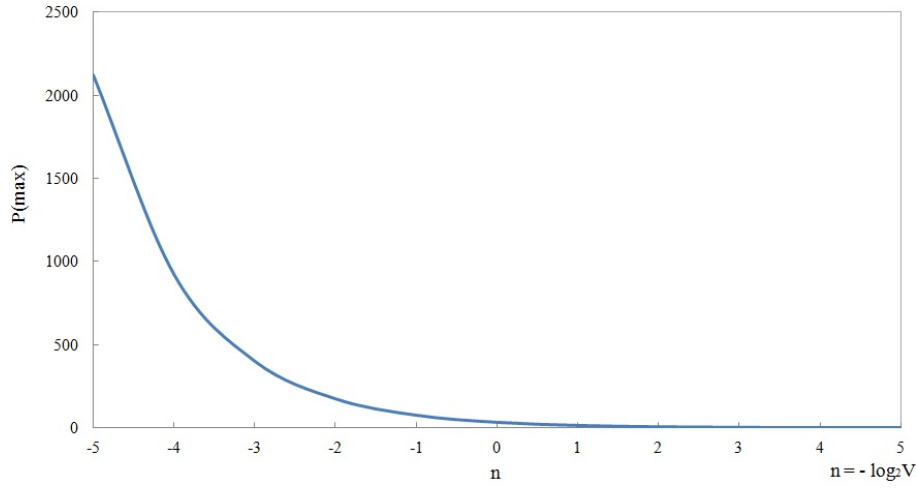


FIGURE 2.6 – Influence de la vitesse de la sphère à la valeur maximale de la force normale.

2.5.2 Choc entre une sphère rigide et un demi-espace viscoélastique

Dans le cas de choc viscoélastique, il faut distinguer la phase de chargement et celle de déchargement.

– Pour la période du chargement :

$$P(t) \approx \frac{4}{3} \sqrt{R} E'_\infty \sum_{i=0}^{n-1} \Psi(t_n - t_i) [\delta^{3/2}(t_{i+1}) - \delta^{3/2}(t_i)] \quad (2.30)$$

– Pour la période du déchargement :

$$R\delta(t_{2m-i}) \approx a^2(t_i) + \sum_{k=i}^{m-1} (a_{k+1}^2 - a_k^2) G(t - t_k, \tau(t_k) - t_k) \quad (2.31)$$

On suppose que les résultats sont connus jusqu'à t_{2m-i} , on fait le calcul pour $t = t_{2m-i+1}$

$$R\delta(t_{2m-i+1}) \approx a^2(t_{i-1}) + \sum_{k=i-1}^{m-1} (a_{k+1}^2 - a_k^2) G(t_{2m-i+1} - t_k, \tau(t_k) - t_k) \quad (2.32)$$

$$R\delta(t_{2m-i+1}) \approx a^2(t_{i-1}) + \sum_{k=i-1}^{m-1} (a_{k+1}^2 - a_k^2) G(t_{2m-i} - t_{k+1}, \tau(t_{k+1}) - t_{k+1}) \quad (2.33)$$

où :

$$a^2(t_{i-1}) = R\delta(t_{i-1}) \quad (2.34)$$

et

$$G(t, \tau) = (1 - k)[1 - \exp\{-\tau/kT\}]\exp\{-(t - \tau)/T\} \quad (2.35)$$

D'après le développement de Taylor, on a :

$$\delta(t_{2m-i+1}) \approx \delta(t_{2m-i}) + \dot{\delta}(t_{2m-i})(t_{2m-i+1} - t_{2m-i}) + \frac{1}{2}\ddot{\delta}(t_{2m-i})(t_{2m-i+1} - t_{2m-i})^2 \quad (2.36)$$

La solution de cette équation permet de déterminer $h = t_{2m-i+1} - t_{2m-i}$, et de calculer $t_{2m-i+1} = h + t_{2m-i}$. La force à l'instant t_{2m-i+1} est calculée par :

$$P(t_{2m-i+1}) = \frac{4}{3} \frac{E'_\infty}{R} \int_{t'=0}^{t_{i-1}} \frac{\partial a^3(t')}{\partial t'} \{\Psi(t_{2m-i+1} - t')\} dt'$$

$$\Rightarrow P(t_{2m-i+1}) \approx \frac{4}{3} \frac{E'_\infty}{R} \sum_{k=0}^{i-1} \Psi(t_{2m-i+1} - t_{k+1})(a^3(t_{k+1}) - a^3(t_k))$$

On pourra alors calculer $\delta(t_{2m-i+1})$, $\dot{\delta}(t_{2m-i+1})$, $\ddot{\delta}(t_{2m-i+1})$ et on peut passer à l'instant t_{2m-i+2} .

Les valeurs des paramètres dans ce cas sont données dans le tableau 2.4.

r (m)	0,01
m (kg)	0,033
E_1 (Pa)	∞
$E_2(0)$ (Pa)	$5,00E + 06$
T (s)	0,003
ν	0,5
$\delta(0)$ (m)	0
$\dot{\delta}(0)$ (m/s)	5

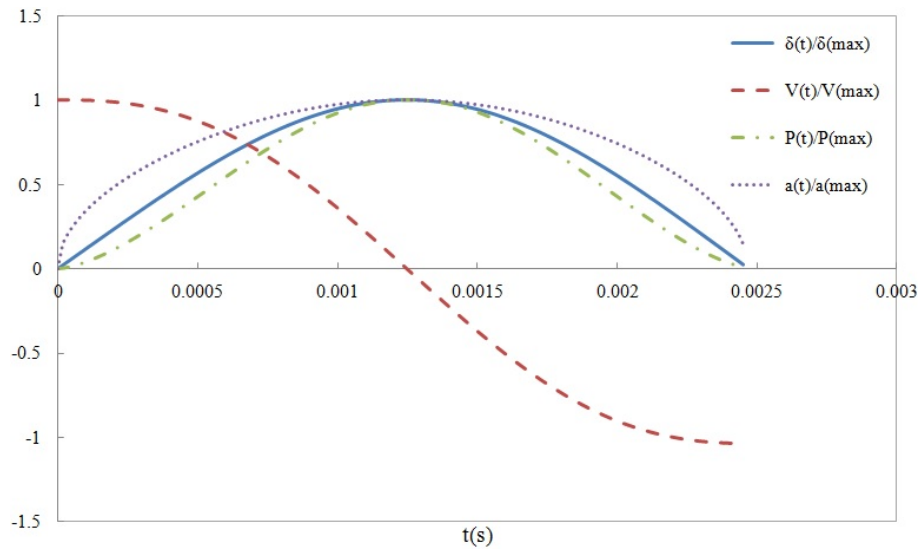
TABLEAU 2.4 – Valeurs données dans le cas choc sphère rigide-espace viscoélastique.

où :

- ν : le coefficient de Poisson du demi-espace.
- T : le temps caractéristique du fluage.

Premier cas : la valeur de k est proche de 1 ($k = 0,99$) où k est le rapport des deux modules $k = \frac{E_\infty}{E_0}$.

La figure 2.7 montre l'évolution au cours du temps des différentes grandeurs normalisées par leurs valeurs maximales respectives. On remarque que les résultats sont proches de ceux du choc élastique. Après le choc, la sphère va rebondir avec une vitesse qui croît et atteint la valeur maximale à l'instant où le déplacement et la force sont nuls. Dans ce cas, il n'y a pas de la perte d'énergie. La vitesse de la sphère avant le choc est égale à celle réfléchiée. Donc, loi comportement du demi-espace viscoélastique dans le cas où

FIGURE 2.7 – Contact viscoélastique dans le cas $k \approx 1$.

$k \approx 1$ est comme la loi du choc élastique. Cela s'explique par la fonction de relaxation du demi-espace. Rappelons cette fonction (voir Eq.(2.6))

$$\Psi(t) = E_{\infty} \left\{ 1 + \frac{1-k}{k} \exp(-t/kT) \right\} \quad (2.37)$$

où k est une paramètre qui se calcule par l'expression suivante :

$$k = \frac{E_2(\infty)}{E_2(0)} \quad (2.38)$$

Quand $k \approx 1$, cette fonction ne dépend pas du paramètre k , c'est-à-dire que la valeur $E_2(0)$ du demi-espace à l'instant initial n'influence pas au cours du choc. Donc, cela devient un comportement quasi-élastique.

δ_{max} (m)	v_{max} (m/s)	P_{max} (N)	a_{max} (m)
0,004231	5	244,1319	0,006505

TABLEAU 2.5 – Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact viscoélastique avec $k \approx 1$.

Deuxième cas : la valeur de k est de 0,5

La figure 2.8 montre l'évolution au cours du temps des différentes grandeurs normalisées par leurs valeurs maximales calculées qui se trouvent dans le tableau 2.6.

δ_{max} (m)	v_{max} (m/s)	P_{max} (N)	a_{max} (m)
0,004397	5	213,9048	0,006631

TABEAU 2.6 – Valeurs maximales des différentes grandeurs pour le contact viscoélastique avec $k = 0,5$.

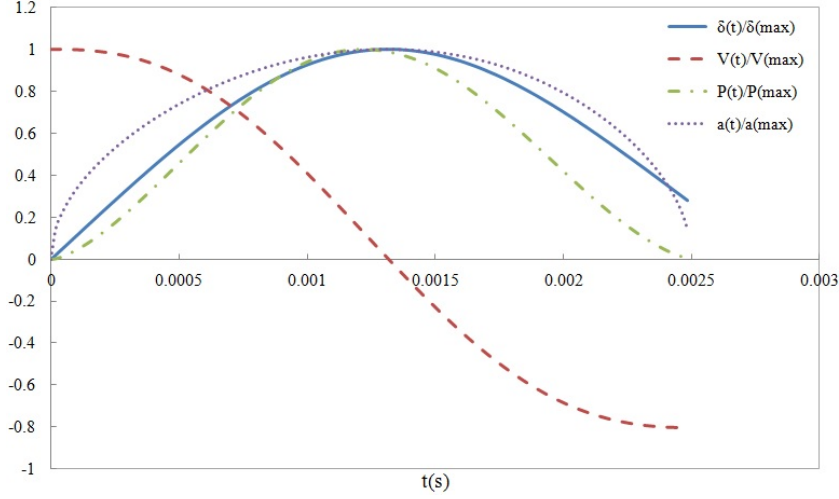


FIGURE 2.8 – Contact viscoélastique dans le cas $k = 0,5$.

On trouve une différence avec le cas du choc élastique. Après le choc, quand la force normale P est nulle, on a encore le déplacement δ du demi-espace viscoélastique. De plus, le temps où la force atteint la maximale est plus tôt que l'instant de la vitesse nulle (ainsi que l'instant du déplacement maximal et du rayon maximal), parce que le déplacement dépend de l'histoire de la charge.

Par ailleurs, on obtient aussi que la vitesse après le choc est égale à 80% de la vitesse initiale v_0 . Donc, il y a une partie d'énergie cinétique qui est transformée par l'autre énergie. Elle se calcule de la façon suivante :

$$\frac{\Delta E}{E_0} = \frac{v_0^2 - v_{finale}^2}{v_0^2} \quad (2.39)$$

où :

- v_0 et v_{finale} sont les vitesses avant et après le choc.
- E_0 est l'énergie de la sphère avant le choc.
- ΔE est l'énergie perte au cours du choc : $\Delta E = E_0 - E_{finale}$.

On peut observer cette perte si k changée (voir figure 2.9). Théoriquement, si $k \approx 1$, on est dans le cas élastique, c'est-à-dire, il n'y a pas de perte d'énergie au cours du choc. Mais, on a trouvé cette perte si $k \approx 1$. C'est une erreur de cet algorithme. Car cette erreur est très petite. Elle est donc négligeable. Les résultats sont admissibles.

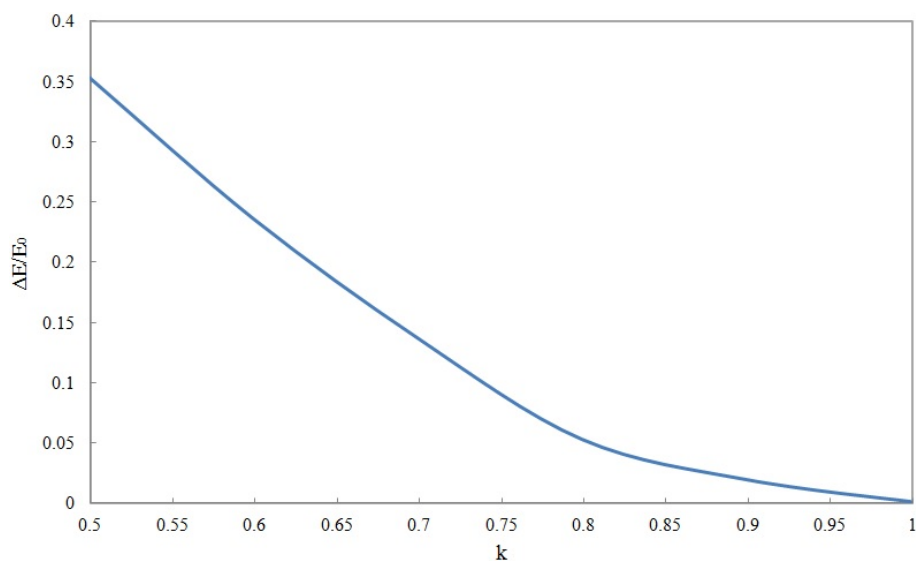


FIGURE 2.9 – Courbe de perte d'énergie.

Pour étudier la convergence de cette méthode, on change le nombre de pas de temps n_t au cours du choc. La figure 2.10 montre l'influence du nombre du pas de temps n_t sur le résultat de calcul. Donc on trouve que cette méthode converge bien quand $n_t > 2000$ et quand $n_t > 4000$, l'erreur du calcul est presque zéro.

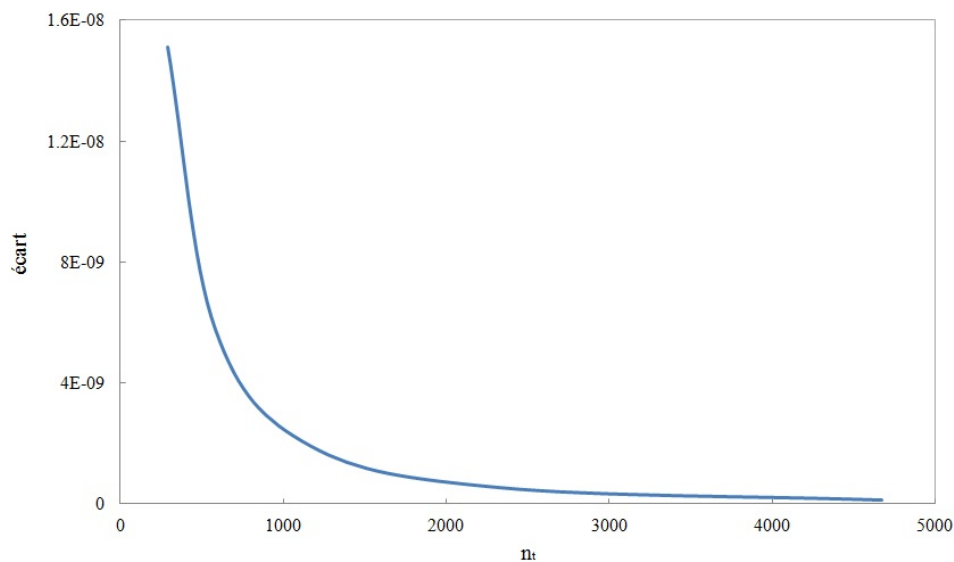


FIGURE 2.10 – Courbe de convergence.

2.6 Conclusions

Au terme de ce travail, on pourra retenir les principales contributions suivantes :

Tout d'abord, l'approche numérique en appliquant le développement du Taylor pour le cas de choc entre une sphère élastique et un demi-espace élastique, est bien validée, car les résultats obtenus sont très proches par rapport à l'analyse théorique de mécanique du contact. Notre méthode a démarré une nouvelle idée pour analyser un choc du matériau viscoélastique pour lequel nous n'avons pas encore la solution exacte. Cette méthode est appliquée essentiellement pour la période déchargée dans laquelle l'expression de la force est très compliquée à calculer. Il faut que nous contrôlions les résultats de la méthode. Une comparaison entre les réponses d'une sphère viscoélastique est nécessaire. En revenant au cas du choc élastique, on a pris la réponse de relaxation de la déformation k qui est très proche de 1 et le résultat obtenu est très favorable. Nous pouvons conclure que la validation de cette méthode est admissible.

Avec seulement quelques modifications mineures de cette méthode, nous avons bien calculé le déplacement, la force, la vitesse d'une sphère viscoélastique en choc avec un demi espace viscoélastique. Ce chapitre a également étudié l'influence de la vitesse de la sphère au cours du choc. Enfin, la méthode nous permettra d'étudier un problème industriel concret : le choc entre un pneu réel et une chaussée réelle.

Roulement sur un massif semi-infini viscoélastique

Sommaire

3.1	Introduction	37
3.2	Contact viscoélastique avec roulement	38
3.3	Discrétisation du problème	40
3.4	Prise en compte de la suspension de la roue	42
3.5	Application à une sphère en roulement	44
3.5.1	Géométrie et matériaux	44
3.5.2	Convergence de la méthode	46
3.5.3	Résistance au roulement du système sans suspension	48
3.5.4	Résistance au roulement du système avec suspension	54
3.6	Conclusions	57

3.1 Introduction

Le pneumatique est constitué de matériaux tels que l'élastomère dont le comportement viscoélastique est dépendant du temps. Cette dépendance en temps doit être prise en compte lors du calcul de contact avec roulement afin d'étudier l'énergie dissipée à l'interface pneumatique/chaussée. Ce chapitre présente un nouvel algorithme pour le calcul temporel du contact 3D d'un corps rigide roulant sur une fondation viscoélastique.

Le contact viscoélastique avec roulement est un problème fondamental qui a d'abord été étudié expérimentalement par Tabor (1952) [6] puis de façon plus théorique par Hunter (1961) [10] et Morland (1962) [11] qui étudient le roulement d'un cylindre rigide sur un demi-espace viscoélastique. Depuis les années 80, la méthode des éléments finis (FEM) a été utilisée pour résoudre des problèmes de contact avec roulement. Padovan et Paramadilok (1985) [19] ont développé une stratégie par éléments finis guidée basée sur une observation Lagrangienne pour résoudre des problèmes de contact viscoélastique avec roulement dans les cas transitoire et stationnaire. Oden et Lin (1986) [21] ont étudié le

contact hyperélastique et viscoélastique d'un cylindre roulant sur une surface rugueuse. La formulation Arbitrairement Eulérienne-Langrangienne (ALE) a été appliquée au problème de contact d'un pneumatique en rotation par Nackenhorst (2004) [37] et appliquée ensuite à la simulation du bruit de contact pneumatique/chaussée (Brinkmeier et al., 2008) [47]. D'autre part, la méthode des éléments de frontière (BEM) a été utilisée par Kalker pour résoudre le problème de contact élastique avec roulement (Kalker, 1990) [24] et plus tard le problème du roulement avec frottement de cylindres viscoélastiques multicouches (Kalker, 1991) [29]. Le contact entre deux cylindres viscoélastiques a également été étudié par BEM par Wang (1993) [30] et par Gonzalez et Abascal (2006) [40].

Bien que de nombreuses stratégies aient été développées pour résoudre le problème de contact viscoélastique avec roulement, la plupart d'entre elles sont limitées au calcul $2D$ et/ou au calcul stationnaire. Dans ce chapitre, une nouvelle formulation est proposée en $3D$ pour le contact avec roulement entre un corps rigide et une fondation viscoélastique. En faisant l'hypothèse que le comportement du matériau est indépendant du temps pour une durée suffisamment courte, le problème de contact viscoélastique est transformé en un problème élastique. Par conséquent, les méthodes numériques développées pour résoudre les problèmes de contact élastiques peuvent être utilisées.

3.2 Contact viscoélastique avec roulement

Le problème de contact entre un massif semi-infini viscoélastique et une surface rigide est considéré sans frottement. Le déplacement normal w du point de coordonnées (x, y) dans la zone de contact dépend de l'histoire de la distribution de pression de contact $p(\xi, \eta, \tau)$:

$$w(x, y, t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\iint_{S(\tau)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \quad (3.1)$$

où $S(\tau)$ est l'aire de contact totale à l'instant τ , J est la fonction de fluage du matériau viscoélastique et $T(x, y, \xi, \eta)$ est la fonction d'influence qui décrit l'interaction entre le point (x, y) et le point (ξ, η) . Dans notre cas, le massif viscoélastique est semi-infini et la fonction d'influence s'exprime :

$$T(x, y, \xi, \eta) = \frac{1 - \nu}{\pi \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}} \quad (3.2)$$

Supposons que la distribution de la pression p est connue à l'instant $t - \Delta t$. Nous proposons une méthode pour calculer la distribution de pression à l'instant t . Pour simplifier les notations, l'intégrale $I_{t_1}^{t_2}$ entre les instants t_1 et t_2 est définie par :

$$I_{t_1}^{t_2} = \int_{t_1}^{t_2} J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\iint_{S(\tau)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \quad (3.3)$$

Donc, l'équation (3.1) devient :

$$I_0^t = I_0^{t-\Delta t} + I_{t-\Delta t}^t \quad (3.4)$$

où le premier terme $I_0^{t-\Delta t}$ est supposé connu. Le deuxième terme $I_{t-\Delta t}^t$ reste à calculer. Si τ varie entre $t-\Delta t$ et t , alors $t-\tau$ varie entre 0 et Δt . Supposons que Δt soit suffisamment petit pour que la valeur de la fonction de fluage soit constante entre 0 et Δt , c'est-à-dire :

$$J(t-\tau) \approx J(0) \quad \text{pour} \quad t-\Delta t < \tau < t \quad (3.5)$$

On trouve alors, après différentiation :

$$I_{t-\Delta t}^t \approx J(0) \left[\iint_{S(t)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta - \iint_{S(t-\Delta t)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t-\Delta t) d\xi d\eta \right] \quad (3.6)$$

où $S(t)$ est l'aire de contact à l'instant t .

En posant $v(x, y, t)$ le déplacement qui tient compte de toutes les valeurs connues jusqu'à l'instant $t-\Delta t$, on a :

$$v(x, y, t) = I_0^{t-\Delta t} - J(0) \iint_{S(t-\Delta t)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t-\Delta t) d\xi d\eta \quad (3.7)$$

Donc, l'équation du déplacement (3.1) devient :

$$w(x, y, t) \approx v(x, y, t) + J(0) \iint_{S(t)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \quad (3.8)$$

Ensuite, la répartition de la pression de contact peut être déterminée en résolvant le problème de contact unilatéral donné par les relations complémentarité suivante :

$$\begin{cases} \forall (x, y) \in S(t), \quad \delta(t) - z(x, y) - w(x, y, t) = 0 \text{ et } p(x, y, t) > 0 \\ \forall (x, y) \in \bar{S}(t), \quad \delta(t) - z(x, y) - w(x, y, t) > 0 \text{ et } p(x, y, t) = 0 \end{cases} \quad (3.9)$$

où $\bar{S}(t)$ est la surface du demi-espace sur laquelle il n'y a pas de contact. Ces conditions de contact en combinaison avec l'équation (3.8) donnent :

$$\forall (x, y) \in S(t), \quad J(0) \iint_{S(t)} T(x, y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \approx \delta(t) - z(x, y) - v(x, y, t) \text{ et } p(x, y, t) > 0 \quad (3.10)$$

Par conséquent, comme $v(x, y, t)$ est connu, le problème est équivalent à un problème de contact élastique à l'instant t .

Pour l'introduction des conditions de roulement, on considère que le corps rigide roule à une vitesse V constante à la surface du massif semi-infini. En utilisant les systèmes de coordonnées de la Figure 3.1, on a les relations suivantes :

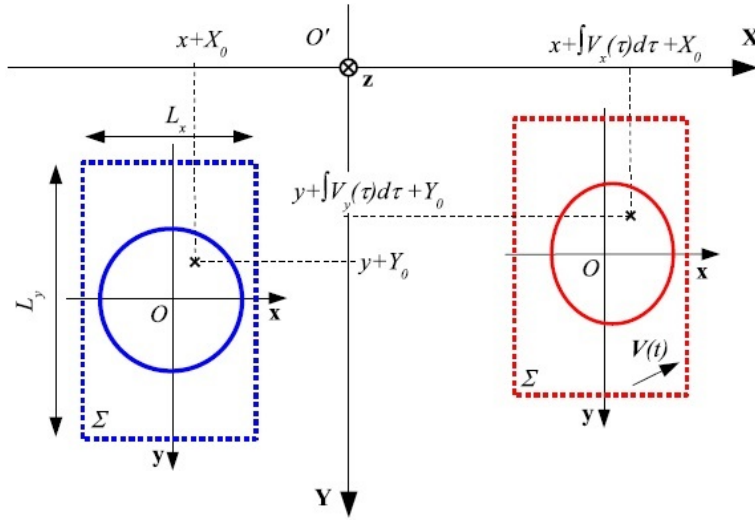


FIGURE 3.1 – Cadres de coordonnées pour le problème de roulement.

$$X(x, y, t) = x + \int_0^t V_x(\tau) d\tau, \quad Y(x, y, t) = y + \int_0^t V_y(\tau) d\tau \quad (3.11)$$

où V_x et V_y sont les vitesses du massif suivant les directions O_x et O_y . En remplaçant (x, y) par (X, Y) et $z(x, y)$ par $Z(X, Y, t)$ dans l'équation (3.1), on obtient une équation pour calculer le déplacement normal $w(X, Y, t)$ en surface du massif lors du contact avec roulement :

$$w(X, Y, t) = \int_0^t J(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\iint_{S(\tau)} T(X, Y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, \tau) d\xi d\eta \right] d\tau \quad (3.12)$$

et l'équation (3.10) devient :

$$\forall (X, Y) \in S(t), \begin{cases} J(0) \iint_{S(t)} T(X, Y, \xi, \eta) p(\xi, \eta, t) d\xi d\eta \approx \delta(t) - Z(X, Y, t) - v(X, Y, t) \\ p(X, Y, t) > 0 \end{cases} \quad (3.13)$$

Ce problème peut être résolu par la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM) décrite dans [20] ou [24].

3.3 Discrétisation du problème

Dans cette partie, la surface est une zone d'intérêt de dimensions $L_x \times L_y$. Cette surface est décomposée en $n = n_x n_y$ éléments rectangulaires de coordonnées (x_i, y_i) et de dimensions $d_x = \frac{L_x}{n_x}$ par $d_y = \frac{L_y}{n_y}$.

En utilisant le résultat de Love [5] pour un massif semi-infini en contact avec un poinçon rectangulaire, le coefficient d'influence peut être calculé par l'expression suivante :

$$T_{ij} = \frac{1-\nu}{\pi} \int_{y_j - \frac{dy}{2}}^{y_j + \frac{dy}{2}} \int_{x_j - \frac{dx}{2}}^{x_j + \frac{dx}{2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(x_i - \xi)^2 + (y_i - \eta)^2}} \quad (3.14)$$

La discrétisation du temps est effectuée de la manière suivante : $\tau = l d\tau$. L'équation (3.10) peut alors s'écrire sous forme discrétisée :

$$J^0 \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^l = \delta^l - z_i - v_i^{l-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.15)$$

où :

$$v_i^{l-1} = \sum_{k=1}^{l-1} J^{l-k} \sum_{j=1}^n T_{ij} [p_j^k - p_j^{k-1}] - J^0 \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^{l-1} \quad (3.16)$$

où $p_j^k = p(x_j, y_j, k d\tau)$, $\delta^l = \delta(l d\tau)$ et $z_i = z(x_i, y_i)$. Les trois dernières relations se trouvent dans Kozhevnikov et al. (2008)[46]. En conditions de roulement, on obtient :

$$X_i^k = x + \sum_{m=1}^k V_x^m d\tau, \quad Y_i^k = y + \sum_{m=1}^k V_y^m d\tau \quad (3.17)$$

et le coefficient d'influence devient :

$$T_{ij} = \frac{1-\nu}{\pi} \int_{Y_j^k - \frac{dy}{2}}^{Y_j^k + \frac{dy}{2}} \int_{X_j^k - \frac{dx}{2}}^{X_j^k + \frac{dx}{2}} \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{(X_i^l - \xi)^2 + (Y_i^l - \eta)^2}} \quad (3.18)$$

Le coefficient d'influence se calcule par la formule analytique suivante [5] :

$$T_{ij} = \frac{1-\nu}{\pi} \left[P \ln \frac{M + \sqrt{M^2 + P^2}}{N + \sqrt{N^2 + P^2}} - Q \ln \frac{M + \sqrt{M^2 + Q^2}}{N + \sqrt{N^2 + Q^2}} \right] \quad (3.19)$$

$$+ \frac{1-\nu}{\pi} \left[M \ln \frac{P + \sqrt{M^2 + P^2}}{Q + \sqrt{M^2 + Q^2}} - N \ln \frac{P + \sqrt{N^2 + P^2}}{Q + \sqrt{N^2 + Q^2}} \right] \quad (3.20)$$

où $M = x_j - x_i + \frac{dx}{2}$, $N = x_j - x_i - \frac{dx}{2}$, $P = y_j - y_i + \frac{dy}{2}$ et $Q = y_j - y_i - \frac{dy}{2}$.

Enfin, on a :

$$J(0) \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^l = \delta^l - Z_i - v_i^{l-1}, \quad i = 1, \dots, n \quad (3.21)$$

où

$$v_i^{l-1} = \sum_{k=1}^{l-1} J^{l-k} \sum_{j=1}^n T_{ij} [p_j^k - p_j^{k-1}] - J(0) \sum_{j=1}^n T_{ij} p_j^{l-1} \quad (3.22)$$

3.4 Prise en compte de la suspension de la roue

Dans cette partie, on considère que l'objet rigide de masse m roulant sur le massif est surmonté d'un système masse/ressort/amortisseur de masse M , de raideur K et d'amortissement D . Cet oscillateur à deux degrés de liberté (ddl) se déplace à une vitesse constante V en surface du massif semi-infini viscoélastique (cf. Figure 3.2). La surface du massif peut éventuellement être irrégulière. Les forces appliquées sur cet oscillateur les forces de gravité $P = Mg$ et $p = mg$.

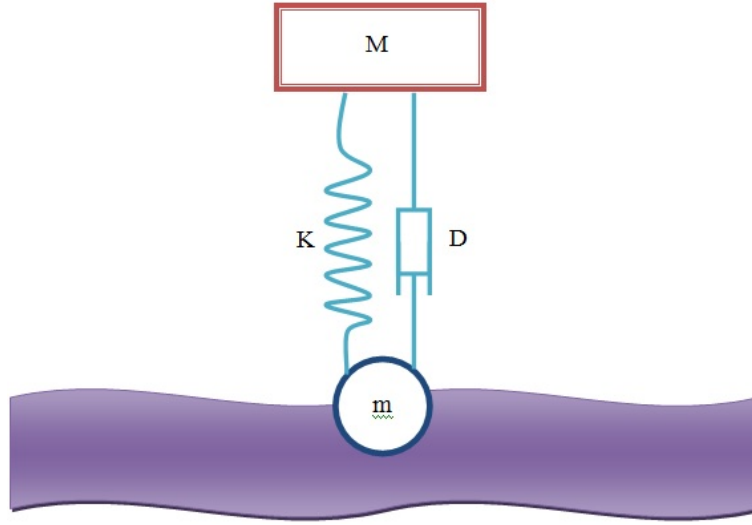


FIGURE 3.2 – *Objet rigide roulant sur la chaussée avec introduction de la suspension.*

A l'instant t , on note $\delta(t)$ le déplacement global de l'objet roulant de masse m et $\Delta(t)$ le déplacement de la masse M . Si on note $p(t)$ la distribution de pression et $P(t)$ la force normale totale dans la zone de contact, on a :

$$P(t) = \iint_{S(t)} p(t) dS \quad (3.23)$$

De plus, les forces appliquées sur le ressort $f_K(t)$ et sur l'amortisseur $f_D(t)$ à l'instant t sont respectivement :

– pour le ressort :

$$f_K(t) = K(\Delta(t) - \delta(t)) \quad (3.24)$$

– pour l'amortisseur :

$$f_D(t) = D(\dot{\Delta}(t) - \dot{\delta}(t)) \quad (3.25)$$

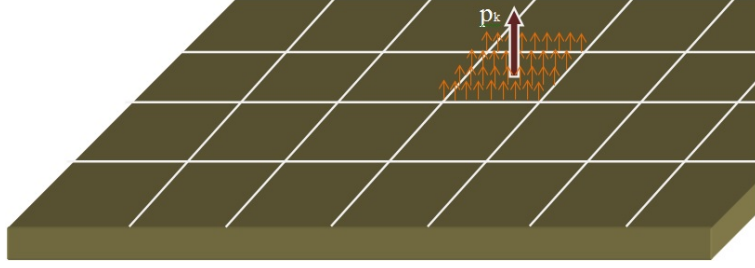


FIGURE 3.3 – Maillage de la surface lisse par des rectangles identiques.

L'équation d'équilibre pour chacune des masses m et M s'écrit :

$$\begin{cases} m\ddot{\delta}(t) - D(\dot{\Delta}(t) - \dot{\delta}(t)) - K(\Delta(t) - \delta(t)) = mg - \iint_{S(t)} p(t)dS \\ M\ddot{\Delta}(t) + D(\dot{\Delta}(t) - \dot{\delta}(t)) + K(\Delta(t) - \delta(t)) = Mg \end{cases} \quad (3.26)$$

En ajoutant l'équation du problème de contact entre le massif semi-infini et l'objet roulant, on obtient un système de $N + 2$ équations à $N + 2$ inconnues $p_k(t)$ ($k \in [1, N]$), $\delta(t)$ et $\Delta(t)$:

$$\begin{cases} J(0) \sum_{j=1}^N T_{kj} p_j^l = \delta_l - Z_k - \nu_k^{l-1} \\ m\ddot{\delta}(t) - D(\dot{\Delta}(t) - \dot{\delta}(t)) - K(\Delta(t) - \delta(t)) = mg - \iint_{S(t)} p(t)dS \\ M\ddot{\Delta}(t) + D(\dot{\Delta}(t) - \dot{\delta}(t)) + K(\Delta(t) - \delta(t)) = Mg \end{cases} \quad (3.27)$$

A l'instant t , on discrétise $\delta(t)$, $\Delta(t)$ et $p_k(t)$ sous la forme δ_l , Δ_l et p_k^l . On a donc :

$$\dot{\delta}_l = \frac{\delta_l - \delta_{l-1}}{dt}, \quad \dot{\Delta}_l = \frac{\Delta_l - \Delta_{l-1}}{dt} \quad (3.28)$$

et

$$\ddot{\delta}_l = \frac{\delta_l - 2\delta_{l-1} + \delta_{l-2}}{dt^2}, \quad \ddot{\Delta}_l = \frac{\Delta_l - 2\Delta_{l-1} + \Delta_{l-2}}{dt^2} \quad (3.29)$$

En remplaçant les équations (3.28) et (3.29) dans le système d'équations (3.27), on obtient :

$$\begin{cases} J(0) \sum_{j=1}^N T_{kj} p_j^l = \delta_l - Z_k - \nu_k^{l-1} \\ m \frac{\delta_l - 2\delta_{l-1} + \delta_{l-2}}{dt^2} + D \frac{\delta_l - \delta_{l-1}}{dt} - D \frac{\Delta_l - \Delta_{l-1}}{dt} - K(\Delta_l - \delta_l) = mg - \sum_{k=1}^N p_k^l \\ M \frac{\Delta_l - 2\Delta_{l-1} + \Delta_{l-2}}{dt^2} + D \frac{\Delta_l - \Delta_{l-1}}{dt} - D \frac{\delta_l - \delta_{l-1}}{dt} + K(\Delta_l - \delta_l) = Mg \end{cases} \quad (3.30)$$

Enfin, on obtient le système d'équations suivant à résoudre :

$$\left\{ \begin{array}{l} J(0) \sum_{j=1}^N T_{kj} p_j^l = \delta_l - Z_k - \nu_k^{l-1} \\ \sum_{k=1}^N p_k^l + \left[\frac{m}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K \right] \delta_l - \left[\frac{2m}{dt^2} + \frac{D}{dt} \right] \delta_{l-1} + \frac{m}{dt^2} \delta_{l-2} - \left[\frac{D}{dt} + K \right] \Delta_l + \frac{D}{dt} \Delta_{l-1} = mg \\ \left[\frac{M}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K \right] \Delta_l - \left[\frac{2M}{dt^2} + \frac{D}{dt} \right] \Delta_{l-1} + \frac{M}{dt^2} \Delta_{l-2} - \left[\frac{D}{dt} + K \right] \delta_l + \frac{D}{dt} \delta_{l-1} = Mg \end{array} \right. \quad (3.31)$$

Pour résoudre ce problème, on utilise encore une fois la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM).

3.5 Application à une sphère en roulement

3.5.1 Géométrie et matériaux

Géométrie On considère une sphère rigide de rayon $R = 150$ mm roulant à une vitesse V_x constante sur un massif semi-infini viscoélastique (Figure 3.4). Les calculs sont effectués

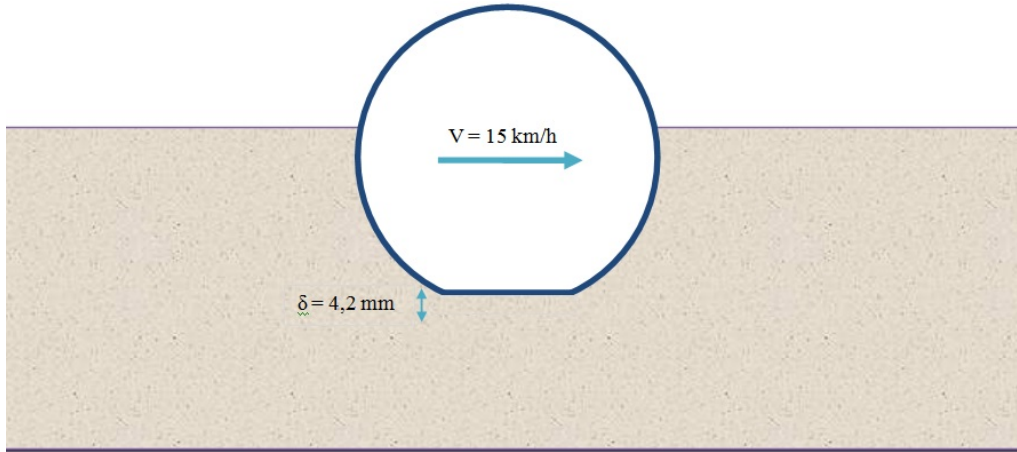


FIGURE 3.4 – Sphère roulant sur un massif semi-infini viscoélastique dans le cas où la pénétration $\delta = 4,2$ mm est imposée.

sur l'intervalle de temps $t \in [0, T]$ dans le cas où la pénétration δ est imposée. La valeur de δ est fixée à $4,2$ mm, de sorte que $\delta/R = 0,028$, ce qui assure les conditions de petites déformations [20]. La trajectoire de la sphère est rectiligne le long de l'axe O_x , ce qui signifie que $V_y = 0$ m/s.

Matériaux La viscoélasticité du matériau est décrite par un solide linéaire standard [49] sous la forme du solide de Kelvin-Voigt à élasticité instantanée, représenté Figure 3.5. Il se compose d'un ressort de module élastique E_1 en série avec un ressort de module élastique E_2 en parallèle avec un amortisseur de viscosité η .

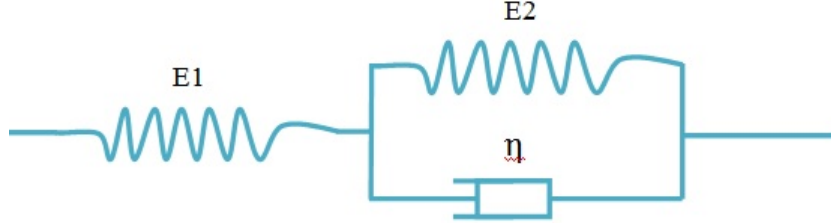


FIGURE 3.5 – *Modèle viscoélastique de Kelvin-Voigt.*

D'après l'ouvrage de Salençon (2009) [49], les fonctions de relaxation et de fluage, notées respectivement $G(t)$ et $J(t)$, sont données par :

$$\begin{cases} G(t) = \frac{E_1}{E_1 + E_2} \left(E_2 + E_1 e^{-\frac{t}{\tau_r}} \right) \\ J(t) = \frac{1}{E_1} + \frac{1}{E_2} \left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_f}} \right) \end{cases} \quad (3.32)$$

où $\tau_r = \eta/(E_1 + E_2)$ et $\tau_f = \eta/E_2$ sont respectivement les temps caractéristiques de la relaxation et du fluage. Pour la suite de l'étude, nous proposons d'introduire les modules élastiques E_0 et E_∞ définis par :

$$E_0 = E_1 \quad (3.33)$$

et

$$E_\infty = \frac{E_1 E_2}{E_1 + E_2} \quad (3.34)$$

Sachant que $\tau_f = E_0 \tau_r / E_\infty$, les fonctions de relaxation et de fluage de l'équation (3.32) peuvent s'écrire :

$$\begin{cases} G(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \\ J(t) = \frac{1}{E_\infty} - \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 E_\infty} e^{-\frac{E_\infty}{E_0} \frac{t}{\tau_r}} \end{cases} \quad (3.35)$$

Pour les calculs qui suivent, les valeurs de E_0 et E_∞ sont : $E_0 = 2E_\infty = 15 \text{ MPa}$. Le temps caractéristique de relaxation est fixé à $\tau_f = 0,001 \text{ s}$ pour une durée de roulement $T = 0,01 \text{ s}$.

3.5.2 Convergence de la méthode

Cette section présente la convergence de la méthode numérique dans le cas de la sphère roulant sur un massif semi-infini dont la surface est plane. La convergence en temps est testée sans la suspension.

Convergence spatiale La convergence de la méthode en fonction de la discrétisation spatiale dans le plan (x, y) a déjà été étudiée par Kozhevnikov et al. (2008) [46]. Cette étude conduit à la règle de discrétisation $dx/a \leq 0,1$, où a est le rayon de l'aire de contact entre la sphère et le massif dans le cas élastique. Dans notre cas, le rayon de l'aire de contact étant d'environ 30 mm , les pas de discrétisation spatiale sont tels que $dx \leq 3,0\text{ mm}$ et $dy \leq 3,0\text{ mm}$.

Convergence temporelle La convergence dans le domaine temporel est testée pour $V_x = 15\text{ m/s}$ (54 km/h), avec $dx = dy = 1,5\text{ mm}$. A cet effet, le calcul de contact est réalisé pour plusieurs nombre d'échantillons du signal temporel n_t dans l'intervalle de temps $[0, T]$, à savoir 11, 21, 51 et 101 (donc les pas de temps dt correspondent aux $0,001\text{ s}$; $0,0005\text{ s}$; $0,0002\text{ s}$; $0,0001\text{ s}$). La force totale P en fonction du temps t et la distribution de pression p sur l'axe des x à $y = 0$ et au pas de temps final T sont données respectivement sur les figures 3.6 et 3.7.

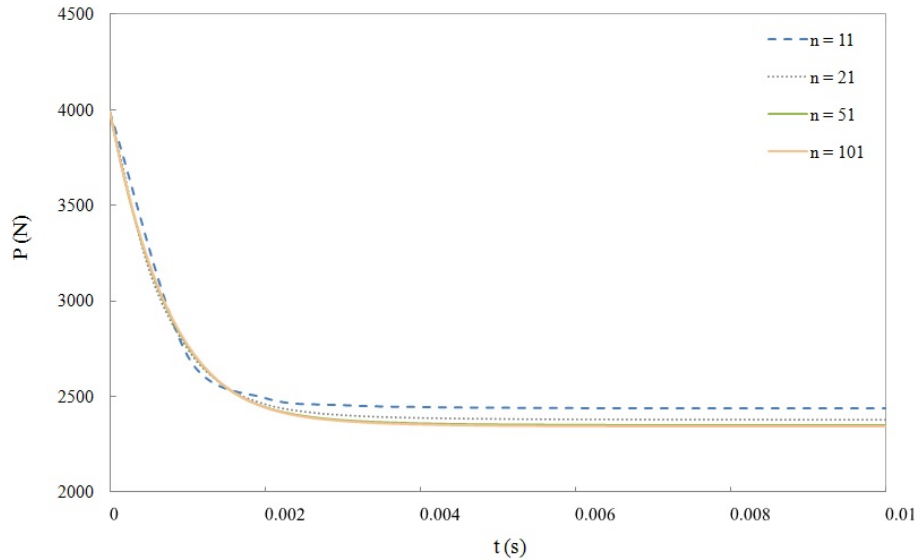


FIGURE 3.6 – Force totale P en fonction du temps t pour différents nombres d'échantillons temporel n_t .

La même procédure est utilisée pour $V_x = 7,5\text{ m/s}$ (27 km/h) et 30 m/s (108 km/h), avec un pas spatial de $3,0\text{ mm}$ dans ces calculs. La courbe de convergence de la force totale

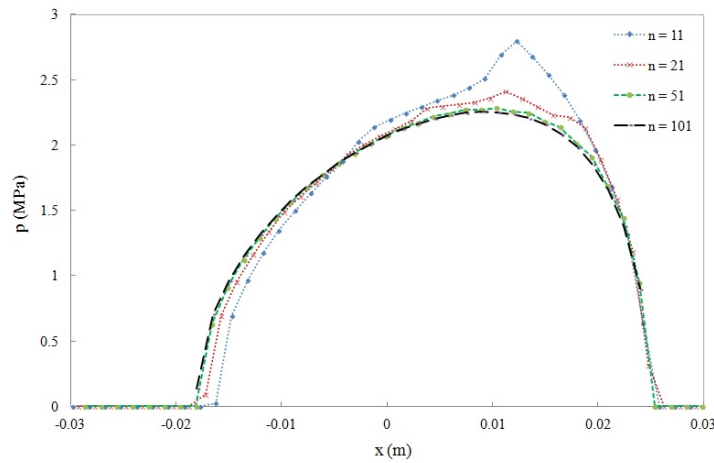


FIGURE 3.7 – Pression de contact p sur l'axe x à l'instant $t = T$ pour différents nombres d'échantillons temporel n_t .

normalisée P/P_{ref} en fonction du nombre d'échantillons en temps n_t est donnée sur la figure 3.8. P_{ref} est la valeur obtenue pour $n_t = 301$.

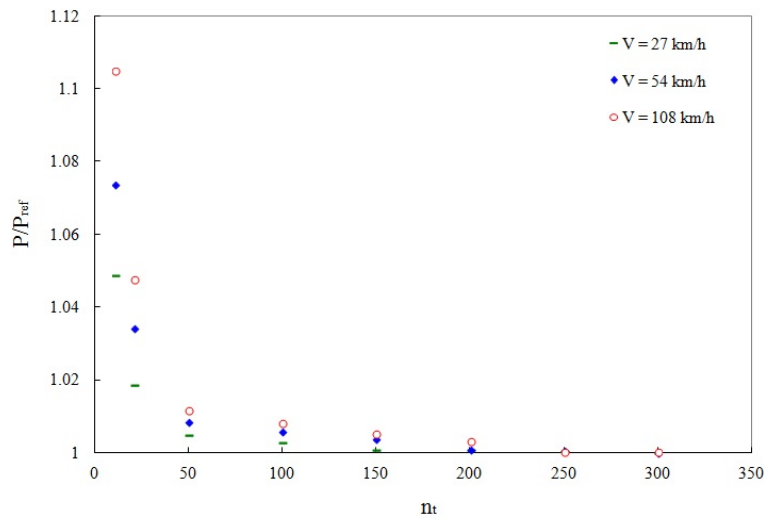


FIGURE 3.8 – Convergence de la méthode pour différentes vitesses de roulement de la sphère.

Les figures 3.6, 3.7 et 3.8 montrent une bonne convergence de l'algorithme dans le domaine temporel. L'erreur de calcul diminue rapidement avec le pas de temps. Quand le nombre de pas de temps n_t est de 11, l'erreur de calcul pour la vitesse $V = 108 \text{ km/h}$ est environ de 10% et pour $V = 27 \text{ km/h}$ de 2%. Pourtant, quand $n_t > 50$, cette erreur est assez petite ($< 1\%$) et à basse vitesse ($V = 27 \text{ km/h}$), le résultat est acceptable avec $n_t > 100$ (l'erreur est inférieure à 0,2%). Avec $n_t \geq 250$, cette méthode converge bien.

3.5.3 Résistance au roulement du système sans suspension

Roulement sur un massif à surface plane : On présente d'abord le résultat du calcul de contact pour une sphère roulant à une vitesse constante $V_x = 15$ m/s sur un massif semi-infini dont la surface est parfaitement plane. La distribution de pression p suivant l'axe O_x à l'instant $t = T$ est présentée Figure 3.9. Les résultats montrent que

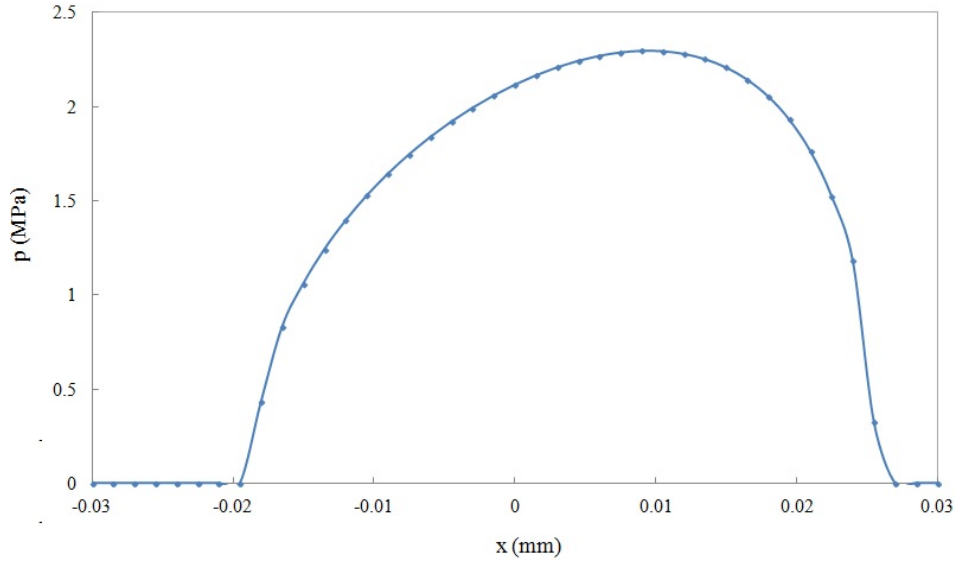


FIGURE 3.9 – Pression normale p suivant l'axe O_x à l'instant $t = T$.

la distribution de pression de contact p est dissymétrique le long de l'axe de roulement O_x . La pression à l'avant de l'aire de contact est plus élevée qu'à l'arrière de l'aire de contact. L'aire de contact est également plus grande à l'avant qu'à l'arrière. Cela est dû à la viscosité du matériau viscoélastique. L'avant de la sphère roulant est une zone de chargement, tandis que son arrière est une zone de déchargement. Sous l'effet de la caractéristique du matériau viscoélastique, à chaque instant, la distribution de la force normale dans la zone de contact dépend de l'histoire de la charge. Alors, avec deux types de chargement différents à l'avant et à l'arrière, on obtient une dissymétrie de cette force au cours du contact.

Il est ensuite intéressant de calculer la force de résistance au roulement F_R s'opposant à l'avancement de la sphère au cours du roulement. La force de résistance au roulement est définie par :

$$F_R = -\sum_{k=1}^N x_k P_k / R \quad (3.36)$$

La force de résistance au roulement pour $V_x = 15$ m/s est présentée Figure 3.10. Sa valeur tend vers une valeur constante $F_R = -74$ N.

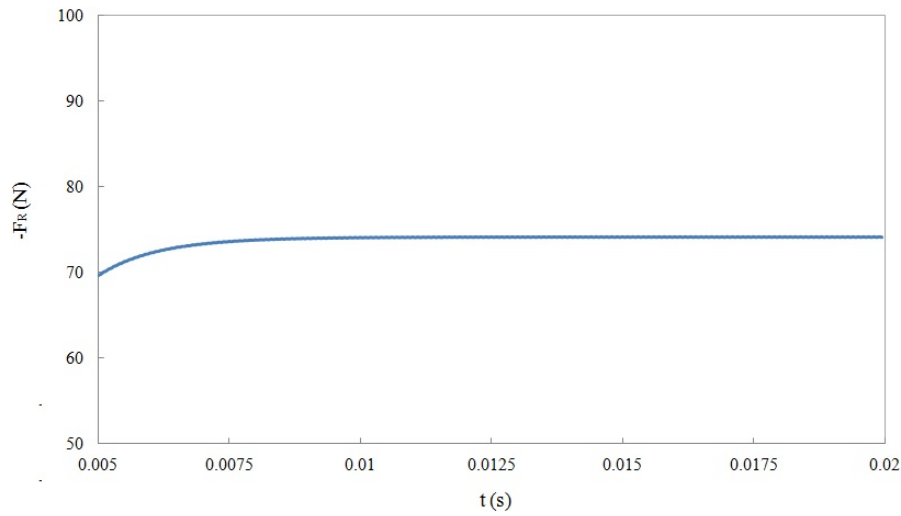


FIGURE 3.10 – Force de résistance au roulement F_R en fonction du temps t .

L'influence de la vitesse de la sphère sur la distribution de pression et la résistance au roulement est également étudiée. Quand la vitesse de la sphère change, les résultats de calcul de contact viscoélastique sont aussi changés. Trois vitesses de la sphère sont ici comparées : $V = 1$ m/s, $V = 5$ m/s et $V = 15$ m/s. La distribution de pression sur l'axe O_x est présentée Figure 3.11.

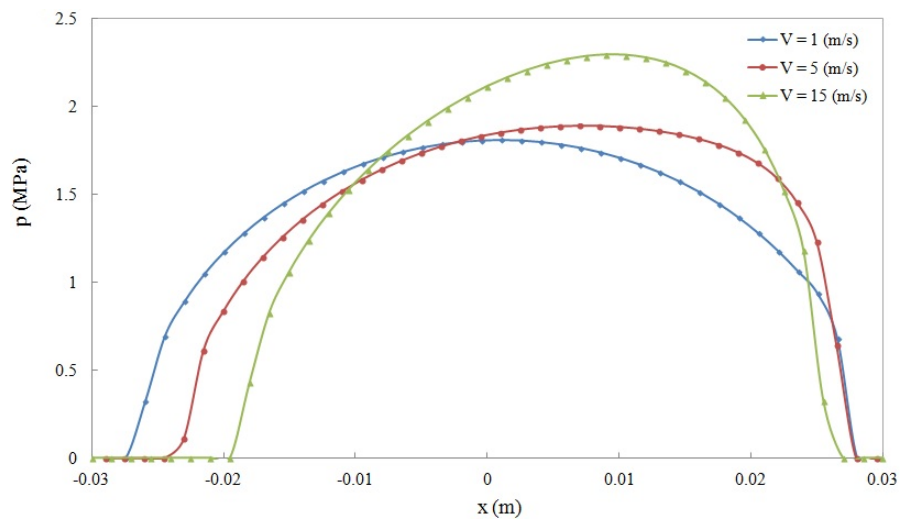


FIGURE 3.11 – Pression normale p suivant l'axe O_x à l'instant $t = T$ pour différentes vitesses de roulement V .

Quand la sphère roule lentement ($V = 1$ m/s), la distribution de pression est quasi-symétrique par rapport à $x = 0$. Quand la vitesse est plus grande, la distribution devient

dissymétrique et la valeur maximale de la pression est plus grande. On constate également que la taille de l'aire de contact diminue lorsque la vitesse de roulement augmente.

La valeur absolue de la force de résistance au roulement F_{Rx} est présentée Figure 3.12 pour différentes vitesses de roulement. La force de résistance au roulement augmente en même temps que la vitesse de roulement de la sphère.

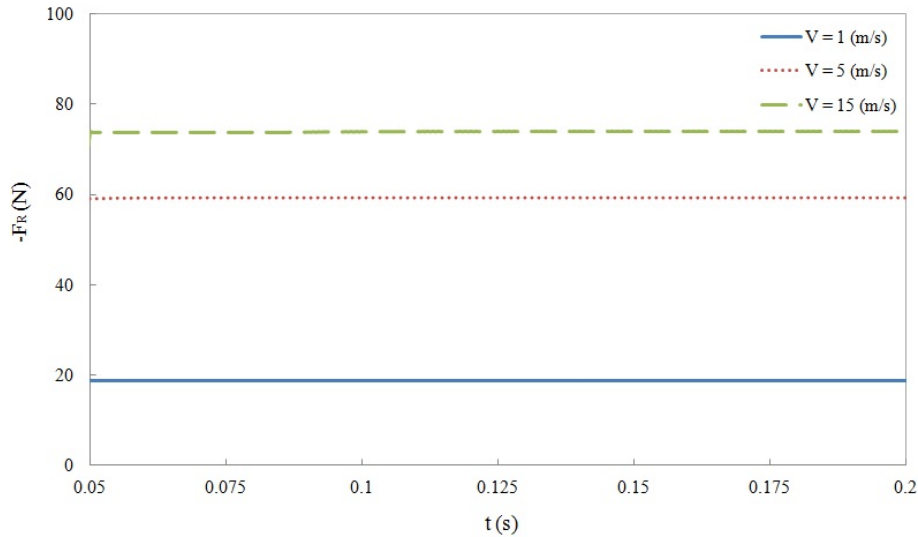


FIGURE 3.12 – Force de résistance au roulement F_{Rx} en fonction du temps t pour différentes vitesses.

Roulement sur un massif dont la surface est sinusoïdale La sphère roule maintenant sur un massif semi-infini dont la surface est sinusoïdale (Figure 3.13). Dans cette

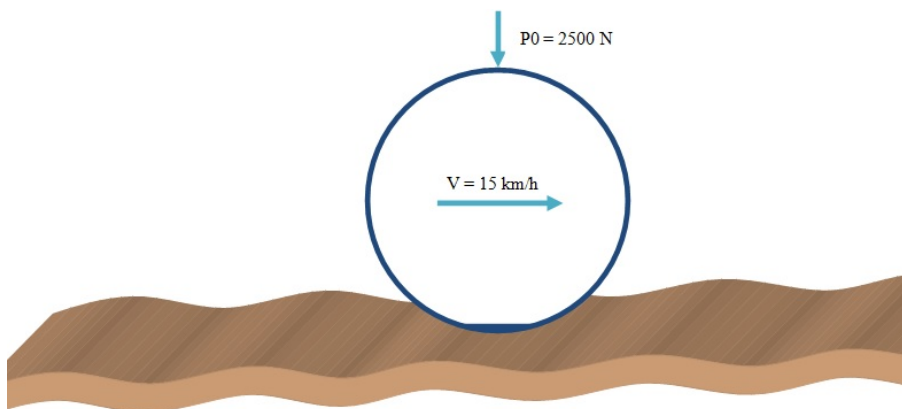


FIGURE 3.13 – Sphère roulant sur un massif semi-infini dont la surface est sinusoïdale.

partie, on travaille à force normale imposée. A l'instant $t = 0$, on impose une force

$P_0 = 2500 \text{ N}$ sur la sphère, l'axe de la force imposée passant par O , le centre de cette sphère. Ensuite, la sphère roule à la vitesse $V = 15 \text{ km/h}$. Dans ce cas, la valeur de δ devient une inconnue. Le problème est résolu en ajoutant l'équation d'équilibre $\sum P_k = P$. La hauteur z de la surface du massif est une fonction sinusoïdale de x définie par :

$$z(x) = z_0 \left(1 + \sin \left(\frac{2n\pi x}{V_x T} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (3.37)$$

où $V_x T = L_x$ est le chemin parcouru et n est le nombre de périodes. Dans cette partie, on fixe $z_0 = 1 \text{ mm}$.

On se propose d'étudier l'influence de la longueur d'onde de la surface sinusoïdale sur la résistance au roulement de la sphère. Pour cela, on fait varier la valeur du paramètre n , à savoir 1, 2, 3, avec une vitesse de 15 m/s. La figure 3.14 montre la force de résistance au roulement lorsque $n = 1$. On constate que cette force devient sinusoïdale au cours du temps quand la surface du massif est sinusoïdale, contrairement à la surface plane pour laquelle F_R restait constante au cours du temps.

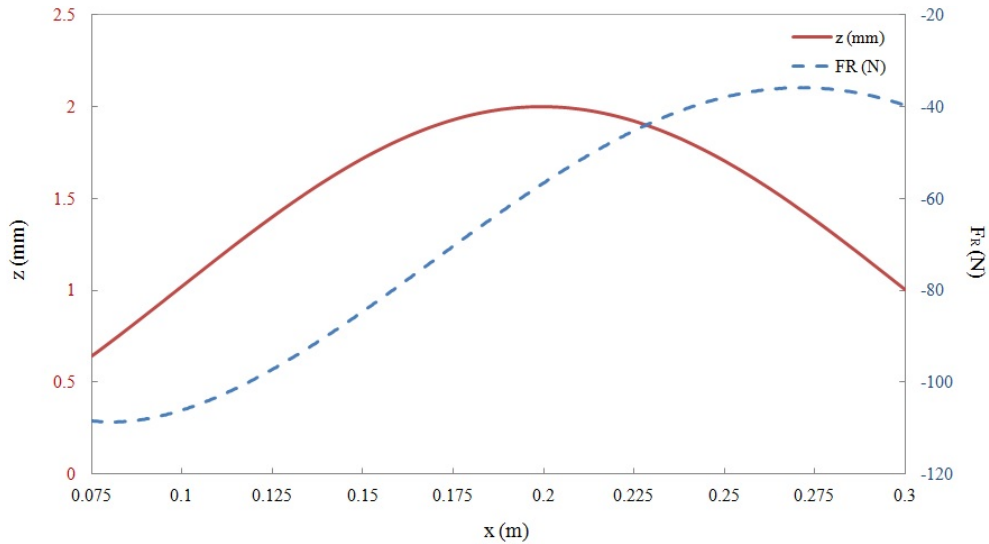


FIGURE 3.14 – Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n=1$.

On s'intéresse ensuite à l'influence de la longueur d'onde de la surface sur la variation de la résistance au roulement. Pour ce faire, on change la valeur de n et quand n est plus grand, la longueur d'onde est plus petite. La figure 3.15 montre la force de résistance au roulement pour $n = 2$ et la figure 3.16 pour $n = 3$. On constate que quand le n augmente (c'est-à-dire lorsque la longueur d'onde diminue), la norme de F_R est plus grande ($|F_{R,n=1}| = 110 \text{ N}$, $|F_{R,n=2}| = 145 \text{ N}$, $|F_{R,n=3}| = 185 \text{ N}$).

On remarque également que la force de résistance au roulement F_{Rx} est déphasée par rapport à la hauteur z du massif au cours du temps. Ce déphasage peut varier suivant les

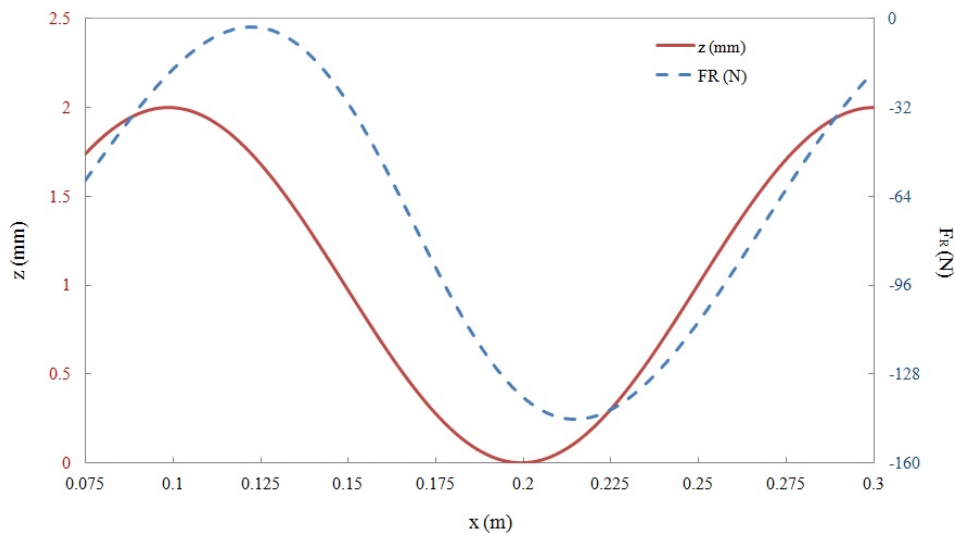


FIGURE 3.15 – Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n=2$.

cas : la valeur maximale de F_{Rx} peut-être atteinte avant ou après la valeur maximale de la hauteur z .

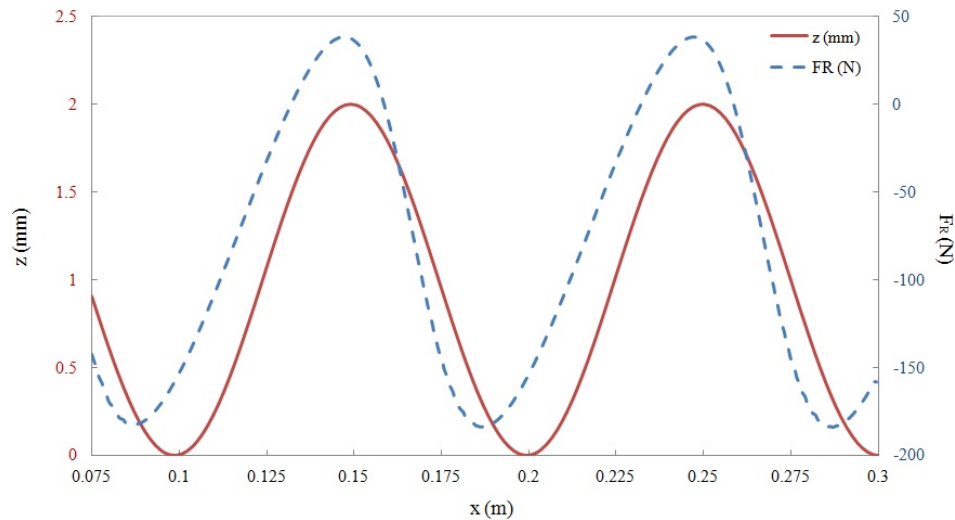
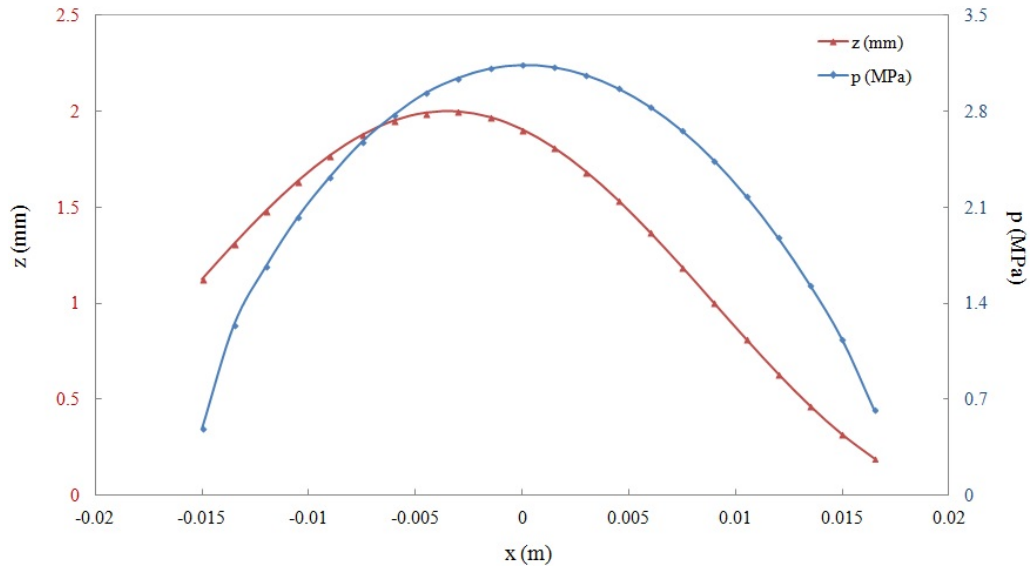
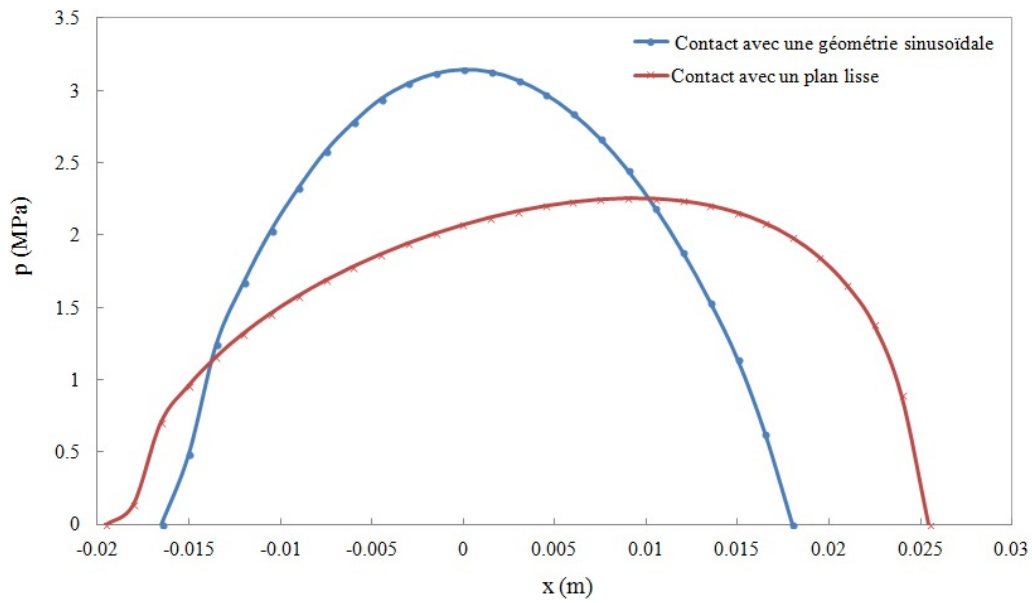


FIGURE 3.16 – Force de résistance au roulement F_R et hauteur z pour $n=3$.

La figure 3.17 montre la distribution de pression à l'instant $t = T$ en comparaison avec la hauteur z de la surface du massif en contact avec la sphère pour $n=3$. Dans ce cas, on trouve que l'aire de contact entre la sphère et le massif est plus petite que dans le cas du contact avec un plan lisse (figure 3.18). Par contre, la valeur maximale de la pression dans ce cas est plus grande que dans le cas d'un massif plan.

FIGURE 3.17 – *Distribution de la pression p à l'instant T .*FIGURE 3.18 – *Comparaison la distribution de la pression p à l'instant T pour les différentes surfaces en contact avec la sphère.*

3.5.4 Résistance au roulement du système avec suspension

Roulement sur un massif à surface plane : On considère maintenant un système mécanique constitué d'une sphère attachée à une suspension et roulant sur un massif semi-infini viscoélastique dont la surface est parfaitement plane. Ce système peut donc être modélisé par un oscillateur linéaire à 2 ddl décrit précédemment Figure 3.2 avec $M = 200$ kg et $m = 10$ kg. Les valeurs de la raideur du ressort et de l'amortissement sont respectivement $K = 200000$ N/m et $D = 200$ Ns/m. Le temps total T de roulement de la sphère est de 30 s et la vitesse de roulement V est de 0,01 m/s.

La figure 3.19 montre que la force totale P reste constante au cours du roulement, i.e. $P = 2060$ N. Par contre, la force de résistance au roulement F_R varie au cours du temps et se stabilise plus tardivement que la force totale P , à partir de l'instant $t = 13$ s. Elle varie de façon périodique autour d'une valeur constante de -5 N.

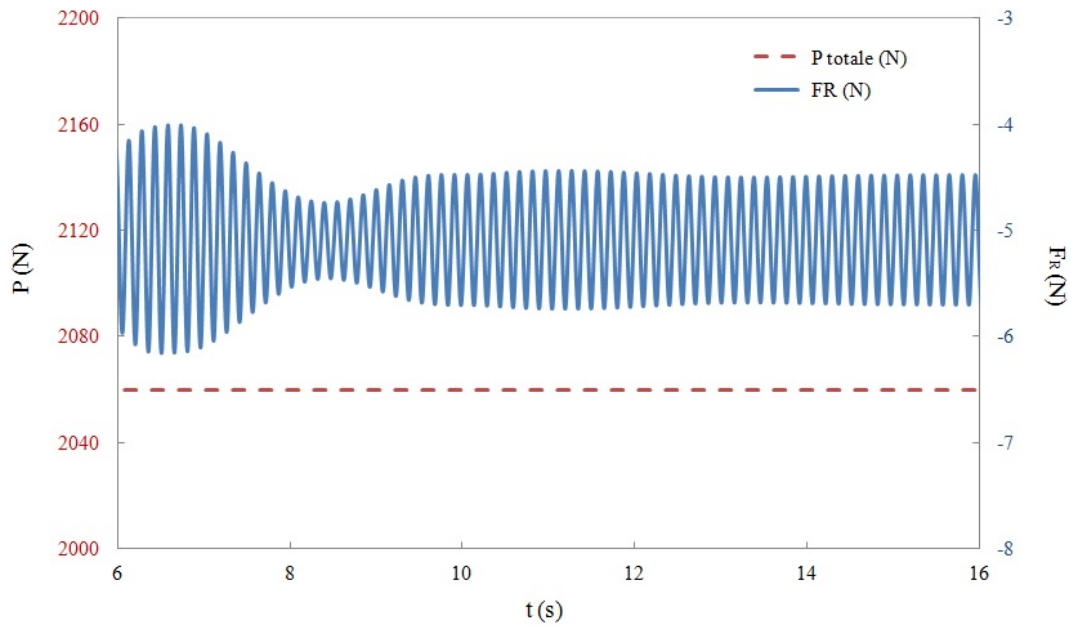
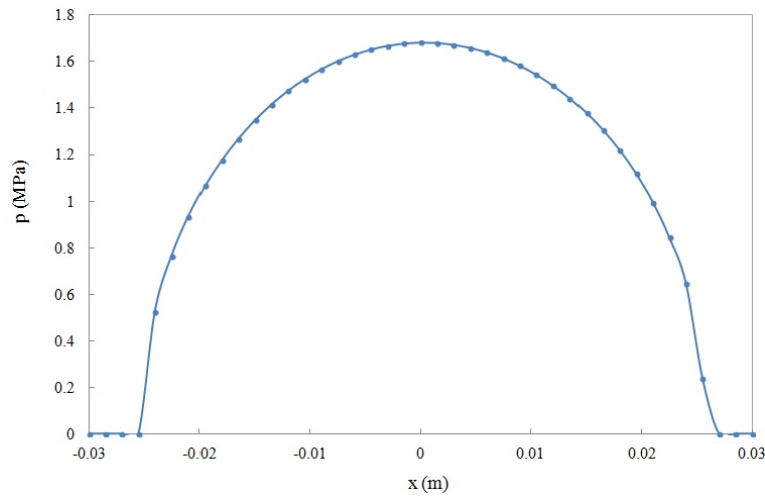


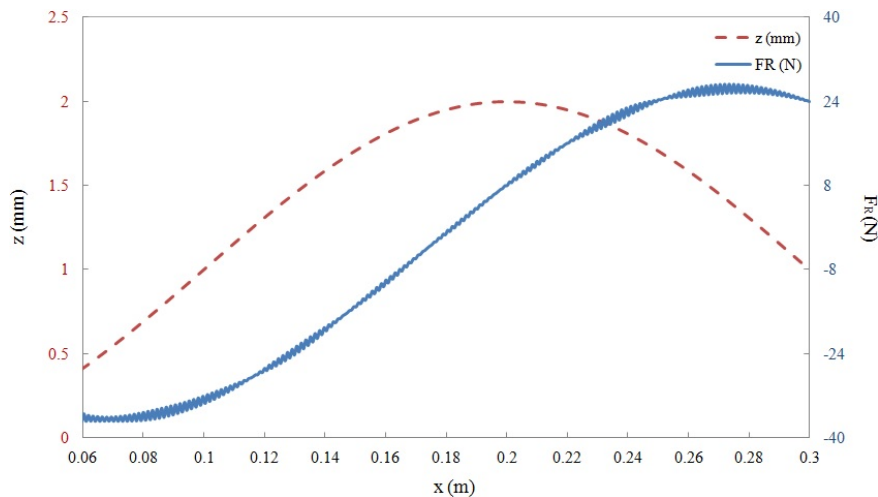
FIGURE 3.19 – Force totale $P(t)$ et force de la résistance au roulement $F_R(t)$ lors de l'introduction de la suspension.

La figure 3.20 montre la distribution de pression à l'instant $t = T$ où le point O correspond à la position du centre de la sphère. Dans ce cas on obtient une valeur maximale de la pression de force normale p est égale 1,7 MPa. A basse vitesse, on obtient une courbe symétrie de la distribution de la pression comme dans le cas du contact élastique. Donc cela nous donne la même zone de contact à l'avant et à l'arrière de la sphère. La zone contact totale est de 5 cm pour ce cas.

FIGURE 3.20 – Distribution de la pression p à l'instant $t = T$.

Roulement sur un massif dont la surface est sinusoïdale : On étudie maintenant l'influence de la hauteur z du massif semi-infini sur le résultat en présence d'une suspension. On utilise la même géométrie périodique qu'à l'équation 3.37.

Comme dans le cas précédent sans suspension, on obtient aussi une variation sinusoïdale de la force résistance de résistance au roulement F_R (Figure 3.21). À cette variation liée à la géométrie du massif, s'ajoute une variation à plus haute fréquence de la valeur de F_R liée au système suspendu. Cette remarque est aussi valable pour le résultat de la distribution

FIGURE 3.21 – Force de la résistance au roulement $F_R(t)$ et z dans le cas d'une sphère roulant avec suspension.

de pression à l'instant $t = T$ (figure 3.22). Sous l'effet de la suspension, la pression de

contact est irrégulière.

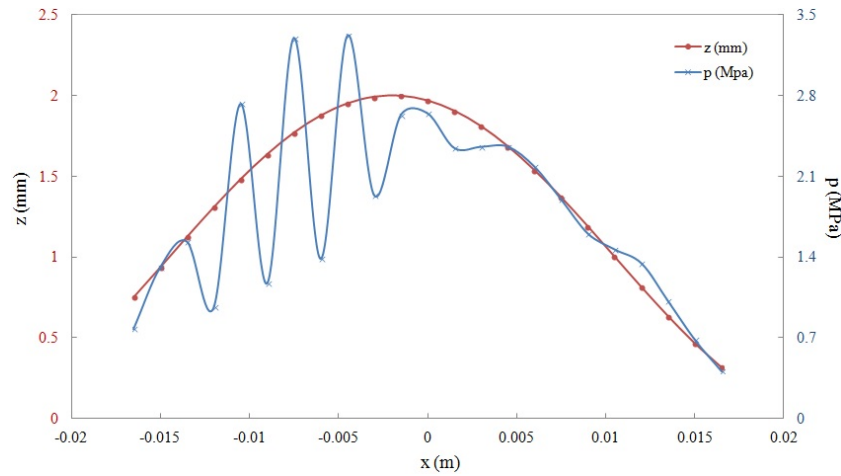


FIGURE 3.22 – Distribution de la pression p à l'instant $t = T$ en présence de la suspension.

Comme dans la partie précédente, on change la valeur de n pour comparer les résultats pour différentes longueurs d'onde de la surface du massif. Le résultat de la figure 3.23 montre que la valeur de la force de résistance au roulement F_R dépend de la géométrie de la surface en contact avec la sphère. Quand la hauteur de la surface varie entre zéro et 2 mm, la force de résistance au roulement F_R varie entre 90 et -110 N. On constate également que quand la sphère descend, la force F_R diminue et devient négative. Par contre, quand la sphère monte, cette force augmente et devient positive.

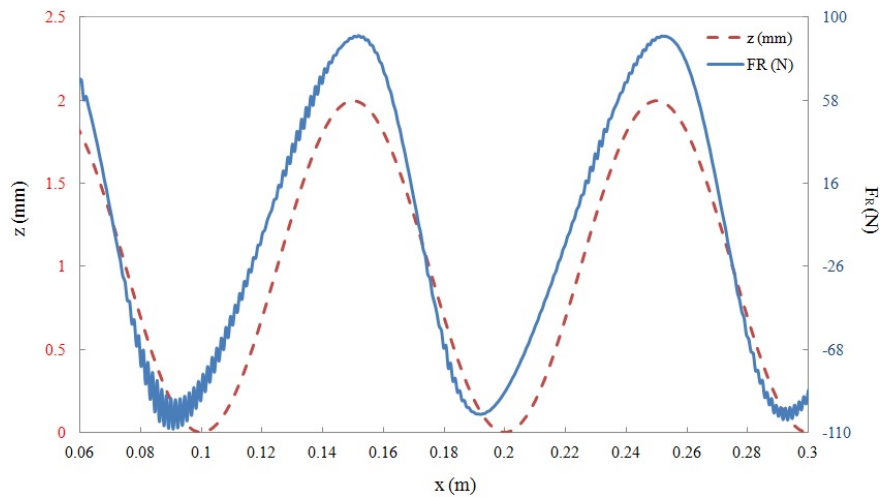


FIGURE 3.23 – Force de la résistance au roulement F_R au cours du contact pour $n = 3$.

3.6 Conclusions

Dans ce chapitre, une nouvelle formulation est proposée pour résoudre le problème de contact temporel entre un corps rigide et un massif semi-infini viscoélastique. Le problème viscoélastique est transformé en une succession de problèmes élastiques. Ainsi, le problème de roulement transitoire peut être résolu en utilisant une méthode de résolution directe classique (Méthode d'Inversion de Matrice).

Les résultats pour une sphère rigide roulant sur le massif semi-infini montrent une bonne convergence temporelle de la méthode de résolution proposée. La dissymétrie de l'aire de contact liée à la viscoélasticité est clairement observée. Ceci est en accord avec les résultats précédents de la littérature en deux dimensions. La dissymétrie de la répartition de pression est également observée.

Ensuite, la méthode est testée pour une sphère en roulement sur un massif dont la surface varie de façon sinusoïdale. La force de résistance au roulement est retardée en comparaison de la géométrie de la surface du massif en raison de l'hystérésis viscoélastique.

Enfin, une étude de l'influence de la suspension sur la force de résistance au roulement a également été testée. Le résultat dans ce cas est prometteur pour étudier l'influence de la suspension sur le contact d'un pneumatique avec une chaussée réelle.

Approche multipoints linéarisée avec roulement

Sommaire

4.1	Problème de contact multi-aspérités	59
4.1.1	Formulation multipoints pour le contact multi-aspérités	59
4.1.2	Hauteur du pneu au cours du roulement	62
4.1.3	Moment, force et coefficient de résistance au roulement	62
4.1.4	Méthode de résolution par approche linéarisée	64
4.2	Validation du modèle	66
4.2.1	Contact pour un massif ayant la forme d'une sphère	66
4.2.2	Contact pour un massif ayant la forme d'un pneumatique	79
4.3	Conclusions	87

4.1 Problème de contact multi-aspérités

Le but de ce chapitre est d'étudier le problème d'un pneu en roulement sur une surface rigide qui se compose de plusieurs aspérités. Par conséquent, la configuration de contact devient « inversée » par rapport au chapitre 3, c'est-à-dire que c'est le massif (assimilé à un pneu) qui se déplace sur la chaussée au cours du temps. Dans ce chapitre, les fonctions de fluage et de relaxation utilisées pour le massif viscoélastique sont notées ϕ et ψ respectivement.

4.1.1 Formulation multipoints pour le contact multi-aspérités

Lorsqu'un massif semi-infini s'enfonce dans une surface rigide composée de plusieurs aspérités ($k \in [1, N]$) avec une pénétration δ connue (Figure 4.1 [52]), la force de contact locale P_k au sommet de l'aspérité k peut s'écrire sous la forme :

$$P_k = 2Gf_k(\delta_k) \quad (4.1)$$

où δ_k est le déplacement au sommet de l'aspérité k , $G = E/2(1 + \nu)$ est le module de cisaillement élastique et f_k est une fonction continue et dérivable sur $[0; \infty[$, appelée « loi de contact ».

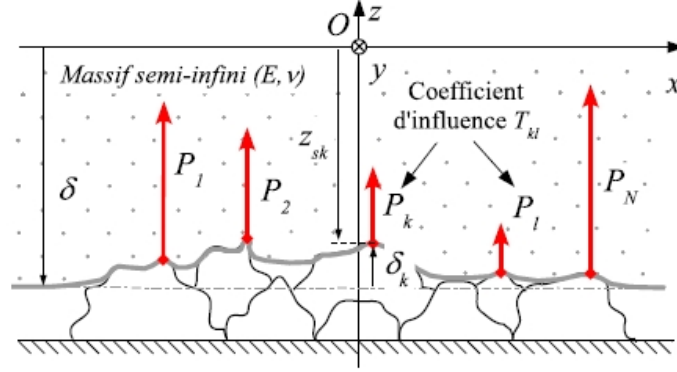


FIGURE 4.1 – *Contact entre un massif semi-infini et une surface rugueuse, d'après Dubois 2012 [52].*

Le massif semi-infini en contact avec la surface rigide des aspérités peut avoir un comportement élastique ou viscoélastique. Ces deux possibilités sont décrites ci-après :

- pour un comportement élastique, le déplacement δ_k au sommet de l'aspérité k s'écrit :

$$\delta_k(t) = z_{c,k}^s - \delta(t) - z_{p,k}^s(t) - u_k(t) \quad (4.2)$$

où δ est la pénétration totale, $z_{c,k}^s$ et $z_{p,k}^s$ correspondent à la hauteur au point M_k de la chaussée et du pneu respectivement, u_k est le déplacement normal du massif semi-infini au point M_k résultant des forces appliquées sur les autres points de contact :

$$\forall k \in [1, N], u_k(t) = \sum_{l=1}^N A_{kl} P_l(t) \quad (4.3)$$

où A_{kl} est la fonction d'influence de Boussinesq :

$$\forall k \in [1, N], A_{kk} = 0 \text{ et } A_{kl} = \frac{1}{\pi E^* \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \quad (4.4)$$

où $E^* = E/(1 - \nu^2) = 2G/(1 - \nu)$ avec E le module d'Young du massif et ν son coefficient de Poisson ;

- pour un comportement viscoélastique, l'équation (4.2) devient :

$$\delta_k(t) = z_{c,k}^s - \delta(t) - z_{p,k}^s(t) - \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (4.5)$$

où ϕ est la fonction de fluage du matériau viscoélastique et T_{kl} est la fonction d'influence dans le cas viscoélastique, qui est supposée être indépendante du temps :

$$\forall k \in [1, N], T_{kk} = 0 \text{ et } T_{kl} = \frac{1 - \nu}{\pi \sqrt{(x_k - x_l)^2 + (y_k - y_l)^2}} \quad (4.6)$$

La relation entre la force normale P_k et le déplacement δ_k au sommet de l'aspérité k s'exprime :

$$P_k(t) = \begin{cases} 2Gf_k(\delta_k(t)) & \text{dans le cas élastique} \\ \int_0^t \psi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} f_k(\delta_k(\tau)) d\tau & \text{dans le cas viscoélastique} \end{cases} \quad (4.7)$$

où ψ est la fonction de relaxation dans le cas viscoélastique. On suppose donc que la loi de contact f_k est la même dans les cas élastique et viscoélastique.

Si le vecteur $\mathbf{X} \in R^N$ et la fonction vectorielle $\mathbf{F} : R^N \rightarrow R^N$ sont définis par :

$$\mathbf{X} = \{P_1, \dots, P_N\}^T \text{ et } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{F_1(\mathbf{X}), \dots, F_N(\mathbf{X})\}^T \quad (4.8)$$

où

$$\forall k \in [1, N], F_k(\mathbf{X}) = \begin{cases} P_k - 2Gf_k(\delta_k(t)) & \text{dans le cas élastique} \\ P_k - \int_0^t \psi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} f_k(\delta_k(\tau)) d\tau & \text{dans le cas viscoélastique} \end{cases} \quad (4.9)$$

alors le système d'équations peut s'écrire de façon vectorielle :

$$\mathbf{F}(\mathbf{X}) = \mathbf{0} \quad (4.10)$$

Lorsque la charge totale P est imposée, la pénétration δ devient une inconnue supplémentaire et le problème est résolu en ajoutant l'équation d'équilibre suivante au système d'équations :

$$P = \sum_{k=1}^N P_k \quad (4.11)$$

Dans ce cas, le vecteur $\mathbf{X} \in R^{N+1}$ et la fonction vectorielle $\mathbf{F} : R^{N+1} \rightarrow R^{N+1}$ sont définis par :

$$\mathbf{X} = \{P_1, \dots, P_N, \delta\}^T \text{ et } \mathbf{F}(\mathbf{X}) = \{F_1(\mathbf{X}), \dots, F_N(\mathbf{X}), F_{N+1}(\mathbf{X})\}^T \quad (4.12)$$

où les fonctions F_k pour $k \in [1, N]$ sont définies comme précédemment et la fonction F_{N+1} est définie par :

$$F_{N+1}(\mathbf{X}) = P - \sum_{k=1}^N P_k \quad (4.13)$$

4.1.2 Hauteur du pneu au cours du roulement

Pour étudier l'influence du roulement sur le contact, on considère un pneu roulant à la vitesse V sur la surface de la chaussée, composée de N aspérités (Figure 4.2). Dans ce cas, la hauteur du pneu $z_{p,k}^s$ au point M_k sommet de l'aspérité k (Eqs. (4.2) et (4.5)) peut s'écrire :

$$z_{p,k}^s(t) = R - \sqrt{R^2 - d_k^2(t)} \quad (4.14)$$

où $d_k(t)$ est la distance entre l'aspérité k et l'axe vertical passant par le centre du pneu O à l'instant t et R est le rayon du pneumatique.

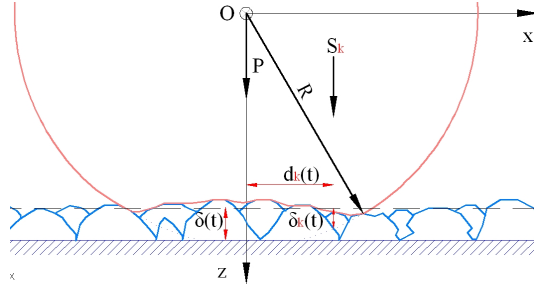


FIGURE 4.2 – Déplacement $\delta_k(t)$ sur l'aspérité k .

Pour résoudre ce problème, il faut calculer les distances $d_k(t)$ à l'instant t . Supposons que $d_k(0)$ est la distance entre l'aspérité k et l'axe vertical passant par le centre du pneu O à l'instant $t = 0$. Lorsque le pneu roule à la vitesse constante V , ces distances peuvent se calculer sous la forme suivante :

$$d_k(t) = d_k(0) - Vt \quad (4.15)$$

Finalement, le déplacement $\delta_k(t)$ sur chaque aspérité k à chaque instant t se calcule de la façon suivante dans le cas élastique :

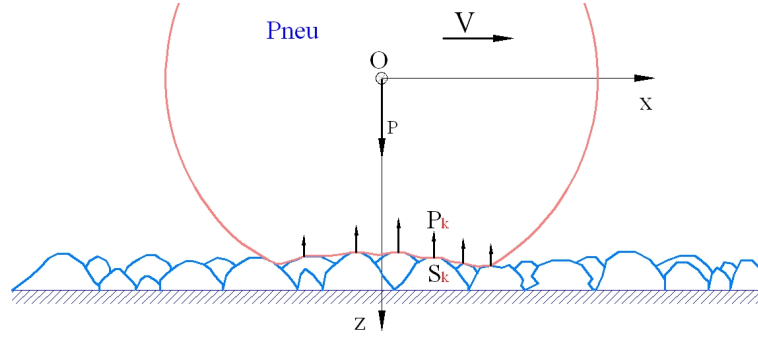
$$\delta_k(t) = z_{c,k}^s(t) - \delta(t) - R + \sqrt{R^2 - d_k^2(t)} - \sum_{l=1}^N A_{kl} P_l \quad (4.16)$$

Dans le cas viscoélastique, on obtient :

$$\delta_k(t) = z_{c,k}^s(t) - \delta(t) - R + \sqrt{R^2 - d_k^2(t)} - \int_0^t \phi(t - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (4.17)$$

4.1.3 Moment, force et coefficient de résistance au roulement

Pour étudier l'influence de la texture de chaussée sur la résistance au roulement, on fait l'hypothèse que les forces de contact locales P_k se concentrent sur les sommets des aspérités

FIGURE 4.3 – *Approche multipoints pour le contact pneumatique/chaussée avec roulement.*

S_k (Figure 4.3). La force de résistance au roulement F_R se calcule grâce au moment de résistance au roulement M_R . Dans la suite, les effets de glissement au cours du roulement sont négligés.

Le moment résultant au point O centre du pneu est la somme des moments des forces de contact P_k appliquées aux points S_k par rapport au point O :

$$\mathbf{M}_O(t) = \sum_{k=1}^{N_c(t)} \mathbf{OS}_k \wedge \mathbf{P}_k \quad (4.18)$$

soit :

$$\mathbf{M}_O(t) = M_{O_x}(t)\mathbf{x} + M_{O_y}(t)\mathbf{y} + M_{O_z}(t)\mathbf{z} \quad (4.19)$$

où :

$$M_{O_x}(t) = \sum_{k=1}^{N_c(t)} y_k P_k(t), \quad M_{O_y}(t) = - \sum_{k=1}^{N_c(t)} x_k P_k(t), \quad M_{O_z}(t) = 0 \quad (4.20)$$

Le roulement se fait autour de l'axe O_y . La définition du moment de résistance au roulement est donc la suivante :

$$M_R(t) = M_{O_y}(t) = - \sum_{k=1}^{N_c(t)} x_k P_k(t) \quad (4.21)$$

En rappelant que R est le rayon du pneu, la force de résistance au roulement est définie par :

$$F_R(t) = \frac{M_R(t)}{R} \quad (4.22)$$

Si on pose $P(t) = \sum_{k=1}^{N_c(t)} P_k(t)$ la charge normale totale appliquée à la roue, le coefficient de résistance au roulement est défini par :

$$\mu_R(t) = \frac{F_R(t)}{P} = \frac{M_R(t)}{RP} \quad (4.23)$$

4.1.4 Méthode de résolution par approche linéarisée

Dans cette partie, nous nous intéressons à l'introduction d'une méthode par approche linéarisée pour résoudre le problème de contact multipoints en conditions de roulement. Rappelons la loi de contact :

$$P_k(t) = \begin{cases} 2Gf_k(\delta_k(t)) & \text{dans le cas élastique} \\ \int_0^t \psi(t-\tau) \frac{d}{d\tau} f_k(\delta_k(\tau)) d\tau & \text{dans le cas viscoélastique} \end{cases} \quad (4.24)$$

Nous étudions d'abord le cas du contact viscoélastique. Entre deux instant successifs t_{i-1} et t_i , la variation de la force P_k sur l'aspérité k s'écrit :

$$\Delta P_k^i = P_k(t_i) - P_k(t_{i-1}) \quad (4.25)$$

D'après la loi de contact viscoélastique, on a :

$$P_k(t_i) = \int_0^{t_i} \psi(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} [f_k(\delta_k(\tau))] d\tau \quad (4.26)$$

et

$$P_k(t_{i-1}) = \int_0^{t_{i-1}} \psi(t_{i-1} - \tau) \frac{d}{d\tau} [f_k(\delta_k(\tau))] d\tau \quad (4.27)$$

En combinant les équations (4.25), (4.26) et (4.27), on obtient la relation suivante :

$$\Delta P_k^i = I_k^i + \int_{t_{i-1}}^{t_i} \psi(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} [f_k(\delta_k(\tau))] d\tau \quad (4.28)$$

où l'intégrale I_k^i est définie par :

$$I_k^i = \int_0^{t_{i-1}} (\psi(t_i - \tau) - \psi(t_{i-1} - \tau)) \frac{d}{d\tau} [f_k(\delta_k(\tau))] d\tau \quad (4.29)$$

Si les deux instants t_{i-1} et t_i sont suffisamment proches pour que la fonction de relaxation ψ puisse être considérée comme constante sur l'intervalle de temps $[0, \Delta t]$, on a :

$$\Delta P_k^i = I_k^i + \psi(0) [f_k(\delta_k(t_i)) - f_k(\delta_k(t_{i-1}))] \quad (4.30)$$

Dans le cas du contact élastique, on obtient directement :

$$\Delta P_k^i = 2G [f_k(\delta_k(t_i)) - f_k(\delta_k(t_{i-1}))] \quad (4.31)$$

On suppose de plus que la fonction f_k est dérivable par rapport à la variable δ_k et que cette dérivée sous forme discrète à l'instant t_{i-1} s'écrit :

$$f'_k(\delta_k(t_{i-1})) = \frac{f_k(\delta_k(t_i)) - f_k(\delta_k(t_{i-1}))}{\delta_k(t_i) - \delta_k(t_{i-1})} \quad (4.32)$$

d'où finalement :

$$\Delta P_k^i = \begin{cases} 2Gf'_k(\delta_k(t_{i-1}))[\delta_k(t_i) - \delta_k(t_{i-1})] & \text{dans le cas élastique} \\ I_k^i + \psi(0)f'_k(\delta_k(t_{i-1}))[\delta_k(t_i) - \delta_k(t_{i-1})] & \text{dans le cas viscoélastique} \end{cases} \quad (4.33)$$

D'après l'équation (4.5), on obtient l'expression suivante dans le cas du contact viscoélastique :

$$\delta_k(t_i) = z_{c,k}^s - \delta(t_i) - z_{p,k}^s(t_i) - \int_0^{t_i} \phi(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (4.34)$$

En posant $\Delta\delta_k^i = \delta_k(t_i) - \delta_k(t_{i-1})$, $\Delta\delta^i = \delta(t_i) - \delta(t_{i-1})$ et $\Delta z_{p,k}^{s,i} = z_{p,k}^s(t_i) - z_{p,k}^s(t_{i-1})$, on trouve :

$$\Delta\delta_k^i = -\Delta\delta^i - \Delta z_{p,k}^{s,i} - J_k^i - \int_{t_{i-1}}^{t_i} \phi(t_i - \tau) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l^i \right] d\tau \quad (4.35)$$

où l'intégrale J_k^i est définie de la façon suivante :

$$J_k^i = \int_0^{t_{i-1}} (\phi(t_i - \tau) - \phi(t_{i-1} - \tau)) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (4.36)$$

On considère que la fonction de fluage ϕ reste constante entre 0 et Δt : $\forall t \in [0, \Delta t]$, $\phi(t) = \phi(0)$. En conséquence :

$$\Delta\delta_k^i = -\Delta\delta^i - \Delta z_{p,k}^{s,i} - J_k^i - \phi(0) \sum_{l=1}^N T_{kl} P_l^i \quad (4.37)$$

Pour le cas élastique, la variation de δ_k entre l'instant t_{i-1} et l'instant t_i est donnée directement par :

$$\Delta\delta_k^i = -\Delta\delta^i - \Delta z_{p,k}^{s,i} - \sum_{l=1}^N A_{kl} \Delta P_l^i \quad (4.38)$$

En introduisant les équations (4.37) et (4.38) dans les relations de l'équation (4.33), nous obtenons finalement dans le cas élastique :

$$\Delta P_k^i = 2Gf'_k(\delta_k(t_{i-1})) \left[-\Delta\delta^i - \Delta z_{p,k}^{s,i} - \sum_{l=1}^N A_{kl} \Delta P_l^i \right] \quad (4.39)$$

et dans le cas viscoélastique :

$$\Delta P_k^i = I_k^i + \psi(0)f'_k(\delta_k(t_{i-1})) \left[-\Delta\delta^i - \Delta z_{p,k}^{s,i} - J_k^i - \phi(0) \sum_{l=1}^N T_{kl} \Delta P_l^i \right] \quad (4.40)$$

Il y a ensuite deux cas possibles pour la résolution du problème :

- soit la pénétration δ est imposée et on obtient un vecteur inconnu $\mathbf{X} = \{P_k\}^T$;
- soit la charge normale totale P est imposée et alors δ devient une inconnue supplémentaire : le vecteur inconnu qui s'écrit $\mathbf{X} = \{P_k, \delta\}^T$ et le problème est résolu en ajoutant l'équation d'équilibre $P = \sum P_k$.

4.2 Validation du modèle

Dans cette partie, nous avons testé le modèle viscoélastique pour calculer la résistance au roulement. Donc la géométrie du massif n'est pas plane, mais courbe pour approcher celle du pneumatique. Dans un premier temps, le pneu à une forme sphérique pour simplifier les calculs. Cette sphère déformable roule sur plusieurs configurations simplifiées de chaussée, composées d'aspérités sphériques rigides. Ensuite, la géométrie réelle d'un pneumatique lisse est introduite dans les calculs. Plusieurs configurations de contact sont testées : ensemble d'aspérités sphériques puis surface de chaussée réelle décomposées en un ensemble d'aspérités de forme quelconque.

4.2.1 Contact pour un massif ayant la forme d'une sphère

Dans un premier temps, la géométrie du massif semi-infini en roulement à la vitesse V est assimilée à une sphère de rayon $R = 0,2$ m (Figure 4.4).

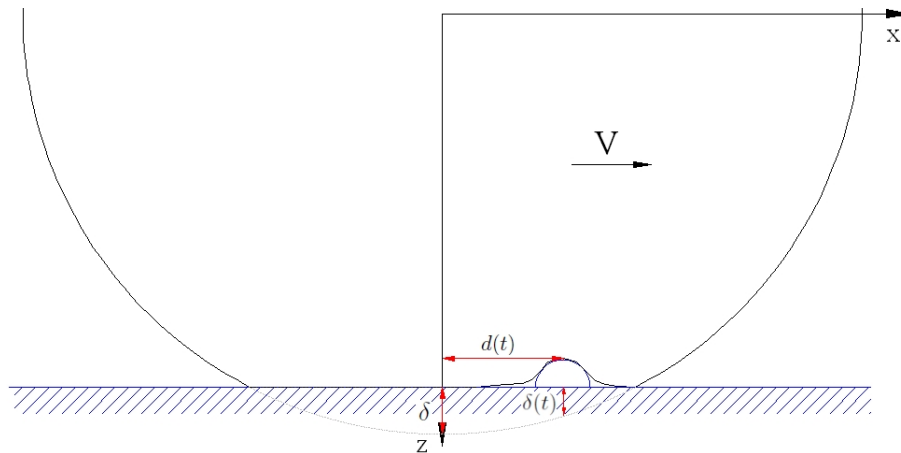


FIGURE 4.4 – *Massif semi-infini déformable de forme sphérique roulant sur une seule aspérité sphérique rigide à la vitesse V .*

Le massif déformable peut avoir un comportement élastique ou viscoélastique :

- pour le cas élastique, le massif a un module d'Young $E = 15$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,5$;
- pour le cas viscoélastique, on utilise le modèle de Kelvin-Voigt défini au chapitre 2, pour lequel les fonctions de fluage ϕ et de relaxation ψ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\phi(t) = \frac{1}{E_\infty} - \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 E_\infty} e^{-\frac{E_\infty}{E_0} \frac{t}{\tau_r}} \quad (4.41)$$

$$\psi(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (4.42)$$

où les modules élastiques sont tels que $E_0 = 15$ MPa et $E_\infty = 7,5$ MPa, le coefficient de Poisson ν est égal à 0,5 et $\tau_r = 1$ s.

4.2.1.1 Roulement sur une seule aspérité sphérique

Surface en contact avec le massif Dans ce premier exemple, la sphère déformable roule sur une surface représentant la chaussée composée d'une seule aspérité sphérique de rayon $r = 0,01$ m, comme illustré Figure 4.5. Par conséquent $k = 1$. La hauteur du sommet de l'aspérité est telle que $z_{c,1}^s = 0$.

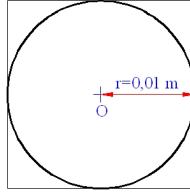


FIGURE 4.5 – Géométrie de l'aspérité sphérique composant la surface de la chaussée.

Type de chargement Les calculs de contact sont effectués pour une pénétration totale $\delta = 0,005$ m constante, dès l'instant $t = 0$. Ensuite, la sphère roule à une vitesse V constante. Dans ce cas, la distance entre le sommet de l'aspérité et l'axe vertical passant par le centre du pneu O à l'instant t est donné par l'équation (4.15) que nous rappelons ici :

$$d_1(t) = d_1(0) - Vt \quad (4.43)$$

La distance initiale $d_1(0)$ est fixé en imposant la condition initiale $\delta_1(0) = 0$, d'où l'expression :

$$d_1(0) = \sqrt{R^2 - (\delta + R)^2} \quad (4.44)$$

La loi de contact dans les cas élastique ou viscoélastique est donnée par les relations de l'équation (4.24) où la fonction f_1 pour une pointe sphérique est donnée en utilisant la théorie classique de Hertz [2] :

$$f_1(t) = \frac{C_1}{1 - \nu} \delta_1(t)^{\gamma_1} \quad (4.45)$$

où C_1 et γ_1 sont des constantes dépendant de la forme et de la géométrie de l'aspérité sphérique : $C_1 = \frac{4}{3}\sqrt{r}$ et $\gamma_1 = \frac{3}{2}$. Le déplacement δ_1 au sommet de l'aspérité s'écrit :

$$\delta_1(t) = -\delta - R + \sqrt{R^2 - d_1^2(t)} \quad (4.46)$$

Pour le contact avec une seule aspérité, la force normale totale est tout simplement $P(t) = P_1(t)$. Le moment de résistance au roulement s'écrit :

$$M_R(t) = -d_1(t)P_1(t) = (Vt - d_1(0))P_1(t) \quad (4.47)$$

La force et le coefficient de résistance au roulement se calculent ensuite à l'aide des équations (4.22) et (4.23), soit :

$$F_R(t) = \frac{Vt - d_1(0)}{R} \quad (4.48)$$

pour la force de résistance au roulement et par conséquent, puisque $P(t) = P_1(t)$ le coefficient de résistance au roulement est une fonction affine du temps t :

$$\mu_R(t) = \frac{Vt - d_1(0)}{R} \quad (4.49)$$

Résultats Dans un premier temps, on étudie les résultats pour une vitesse de roulement $V = 0,01$ m/s. La figure 4.6 donne la force de contact normale $P_1 = P$ en fonction du temps t . Dans le cas élastique, cette force est symétrique par rapport au temps, avec pour

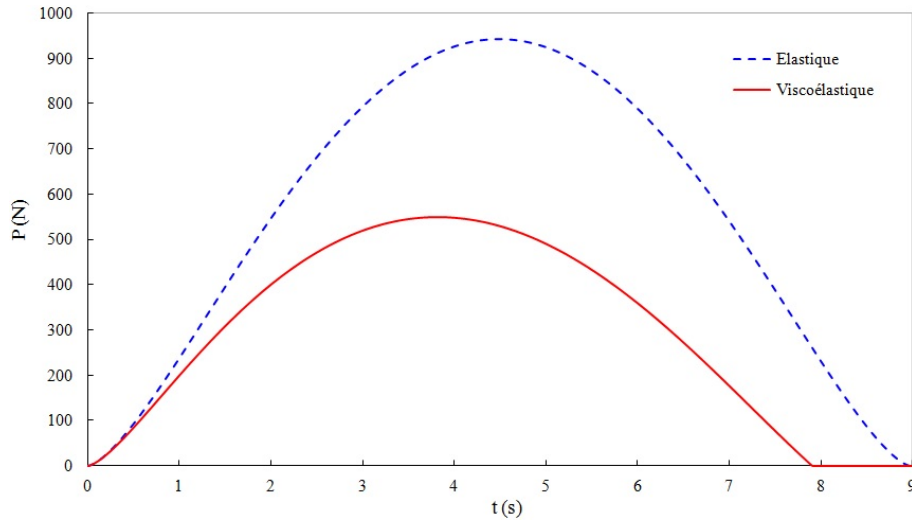


FIGURE 4.6 – Force normale $P_1(t)$ lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique.

axe de symétrie l'instant où le déplacement $\delta_1(t)$ est maximal et égal à δ . Cet instant est noté t_{max} par la suite. Autrement-dit, les phases de chargement et de déchargement du pneu sur l'aspérité sont symétriques. En revanche, dans le cas viscoélastique la courbe est dissymétrique. La force normale $P_1(t)$ atteint une valeur maximale avant l'instant t_{max} où l'enfoncement est maximal et atteint la valeur zéro avant que le déplacement au sommet de l'aspérité ne s'annule. La figure 4.7 donne la courbe P_1 en fonction de δ_1 lors d'un cycle

de chargement/déchargement du pneu en roulement sur l'aspérité sphérique. Dans le cas viscoélastique, on obtient une perte d'énergie par hystérésis, alors qu'aucune perte n'est observée dans le cas élastique.

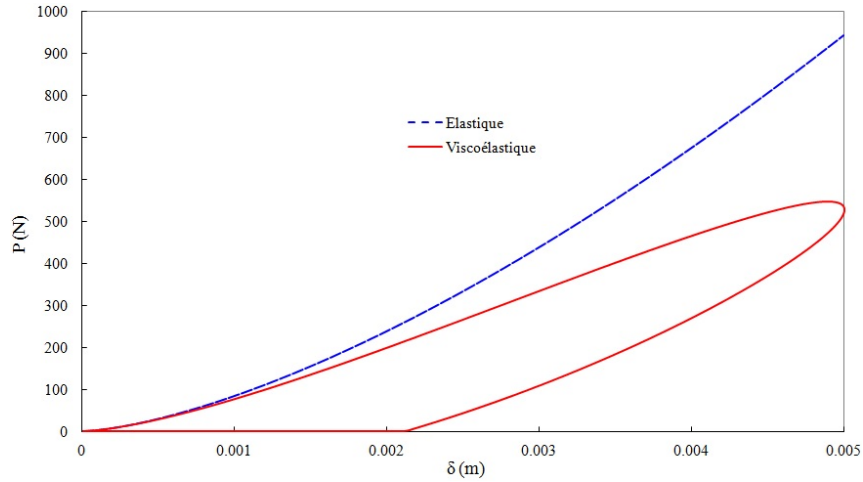


FIGURE 4.7 – Cycle de chargement/déchargement donnant P_1 en fonction δ_1 lors du roulement sur une seule aspérité sphérique.

Les figures 4.8 et 4.9 donnent respectivement la force de résistance au roulement F_R et le coefficient de résistance au roulement μ_R en fonction du temps.

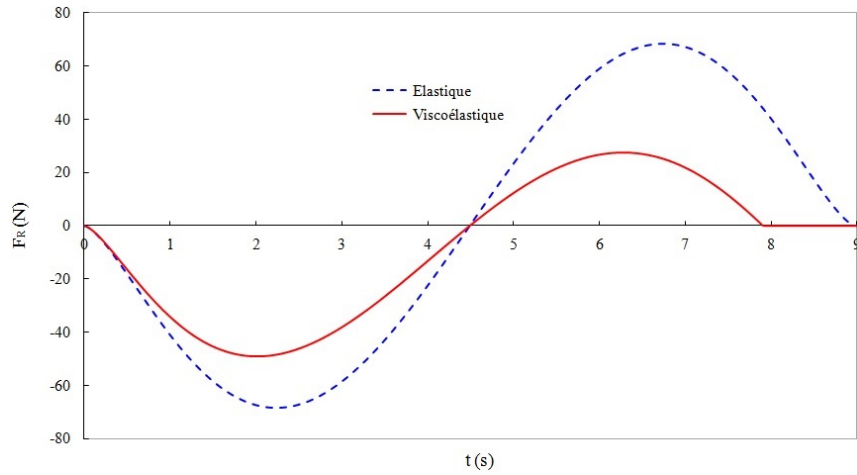


FIGURE 4.8 – Force résistance F_R lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique.

Dans le cas élastique, on observe que les deux courbes sont antisymétriques par rapport à l'instant t_{max} où la pénétration de l'aspérité dans le pneu est maximale. À cet instant les

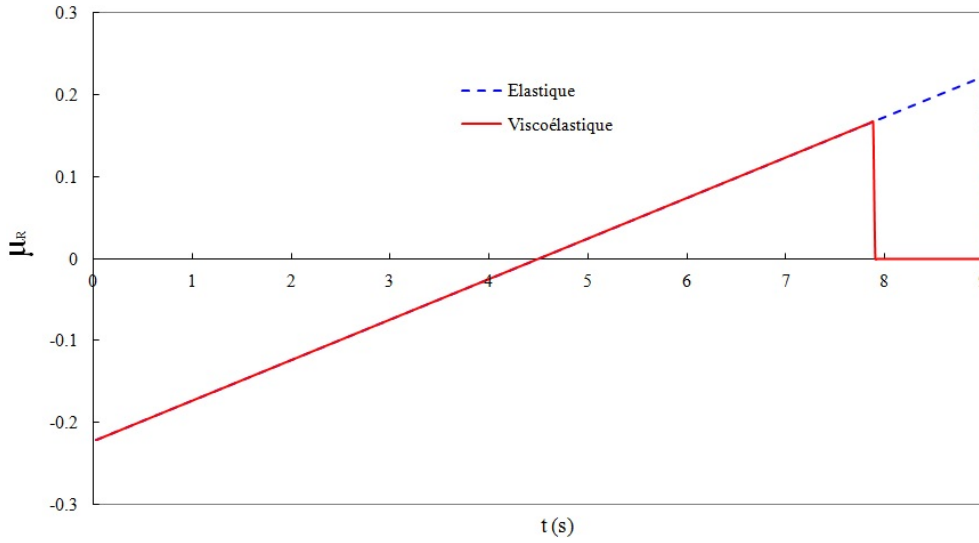


FIGURE 4.9 – Coefficient μ_R lors du roulement d'un pneu de forme sphérique sur une seule aspérité sphérique.

deux grandeurs sont nulles car le centre de roue et le sommet de l'aspérité sont sur le même axe ($d_1(t_{max})=0$). Au contraire, les courbes ne sont pas parfaitement antisymétriques par rapport à cet axe dans le cas viscoélastique. La force et le coefficient de résistance au roulement sont nuls avant de terminer la période de roulement. Dans le cas élastique, sur un cycle de chargement/déchargement, la valeur moyenne de la force de résistance au roulement \bar{F}_R et celle du coefficient de résistance au roulement $\bar{\mu}_R$ sont nulles, montrant qu'il n'y a pas de dissipation d'énergie.

Dans le cas viscoélastique, ces valeurs sont non nulle, $\bar{F} = -8,27$ N et $\bar{\mu} = -0,02$, en raison de la dissipation d'énergie. On constate également que le coefficient de résistance au roulement μ_R est une fonction affine du temps, comme exprimé dans l'équation (4.49). Cette linéarité est indépendante du comportement du matériau.

On propose maintenant d'étudier l'influence de la vitesse de roulement V sur le résultat. On réalise les calculs pour trois vitesses V différentes :

- $V = 100$ m/s : le déplacement δ_1 imposé est un phénomène court par rapport au temps caractéristique de relaxation τ_r ;
- $V = 0,01$ m/s : le temps pour atteindre la valeur maximale du déplacement δ_1 imposé est très proche du temps caractéristique de relaxation τ_r ;
- $V = 0,00001$ m/s, le déplacement δ_1 imposé est un phénomène long par rapport au temps caractéristique de relaxation τ_r .

Pour le cas élastique, les résultats sont indépendants de la vitesse. La figure 4.10 donne la force de résistance au roulement F_R en fonction de la distance parcourue $x = Vt$ pour les différentes vitesses de roulement. Les calculs dans le cas élastiques avec $E = 15$ MPa

et $E = 7,5$ MPa y sont également représentés. On observe les résultats suivants :

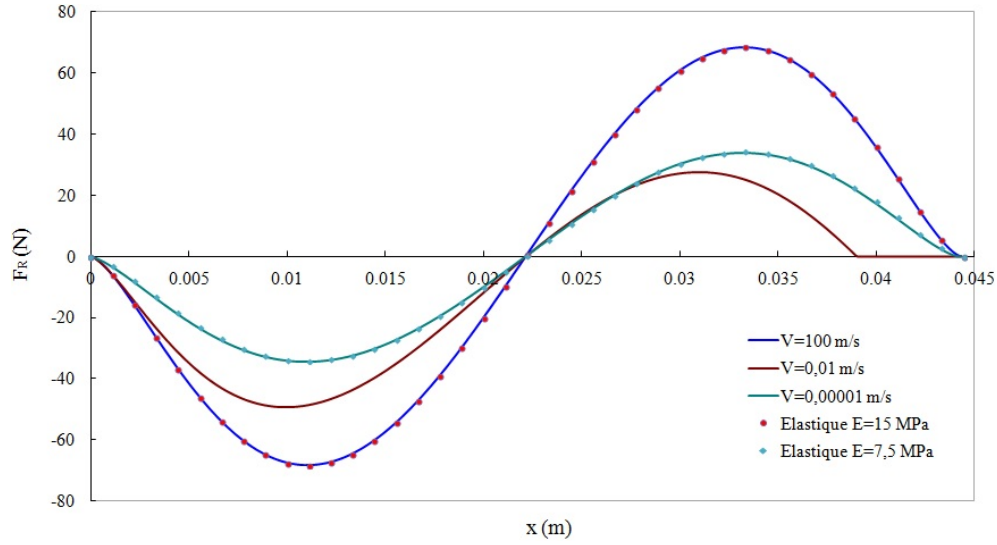


FIGURE 4.10 – Influence de la vitesse V sur la force de résistance au roulement F_R pour un pneu de forme sphérique roulant sur une seule aspérité sphérique.

- pour le cas $V = 0,01$ m/s, la courbe de la force de la résistance au roulement F_R est dissymétrique. Cette force atteint la valeur zéro avant de terminer la phase de déchargement. Dans ce cas, la valeur moyenne de la force \overline{F}_R est différente de zéro.
- pour le cas $V = 100$ m/s, la courbe de la force de la résistance au roulement F_R est symétrique et on obtient le même résultat que celui dans le cas du contact élastique avec le module d'Young $E_{\text{élastique}} = E_{0,\text{viscoélastique}} = 15$ MPa. La valeur moyenne de la force \overline{F}_R est nulle dans ce cas.
- pour le cas $V = 0,00001$ m/s, la courbe de la force de la résistance au roulement F_R est symétrique et le résultat est identique à celui dans le cas du contact élastique avec le module d'Young $E_{\text{élastique}} = E_{\infty,\text{viscoélastique}} = 7,5$ MPa. La valeur moyenne de la force \overline{F}_R est nulle pour ce cas.

4.2.1.2 Roulement sur un ensemble de sphères à déplacement global δ imposé

Les premiers calculs effectués pour le roulement sur une seule aspérité sphérique permettent de considérer la méthode dans le cas d'une surface composée de plusieurs aspérités sphériques. Les calculs sont réalisés à déplacement global imposé $\delta = 0,005$ m. Les paramètres de calcul sont les mêmes que précédemment, seule la géométrie de la surface de la chaussée est changée. La vitesse de roulement V est fixée à $0,01$ m/s.

Géométrie de la surface en contact avec le massif :

La surface en contact avec le massif est composée de $N = 9$ aspérités sphériques identiques de rayon $r = 0,01$ m, disposées comme illustré figure 4.11. Tous les sommets des aspérités

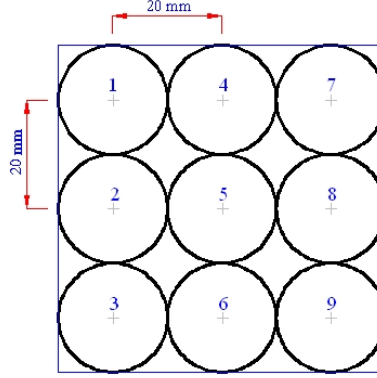


FIGURE 4.11 – Surface composée de $N = 9$ aspérités sphériques en contact avec le massif semi-infini de géométrie sphérique.

sont placés dans le même plan, c'est-à-dire :

$$\forall k \in [1, N], z_{c,k}^s = 0 \quad (4.50)$$

Les distances $d_k(0)$ à l'instant $t = 0$ sont données par :

$$d_1(0) = d_2(0) = d_3(0) = \sqrt{R^2 - (\delta + R)^2} \quad (4.51)$$

$$d_4(0) = d_5(0) = d_6(0) = d_1(0) + 2r \quad (4.52)$$

$$d_7(0) = d_8(0) = d_9(0) = d_1(0) + 4r \quad (4.53)$$

Rappelons que :

$$d_k(t) = d_k(0) - Vt \quad (4.54)$$

Donc, on peut calculer les distances $d_k(t)$ à l'instant t sous la forme :

$$d_1(t) = d_2(t) = d_3(t) = d_1(0) - Vt \quad (4.55)$$

$$d_4(t) = d_5(t) = d_6(t) = d_1(t) + 2r \quad (4.56)$$

$$d_7(t) = d_8(t) = d_9(t) = d_1(t) + 4r \quad (4.57)$$

Les conditions initiales sont fixées par : $\delta_k(0) = 0$. Le moment de résistance au roulement s'exprime :

$$M_R(t) = - \sum_{k=1}^{N_c(t)} d_k(t) P_k(t) = - \sum_{k=1}^{N_c(t)} (d_k(0) - Vt) P_k(t) \quad (4.58)$$

La force et le coefficient de résistance au roulement se calculent ensuite à l'aide des équations (4.22) et (4.23), avec :

$$P(t) = \sum_{k=1}^{N_c(t)} P_k(t) \quad (4.59)$$

Résultats La figure 4.12 donne la force de contact normale P_5 sur l'aspérité centrale en fonction du temps t . Comme le cas précédemment, pour le cas élastique on trouve que la

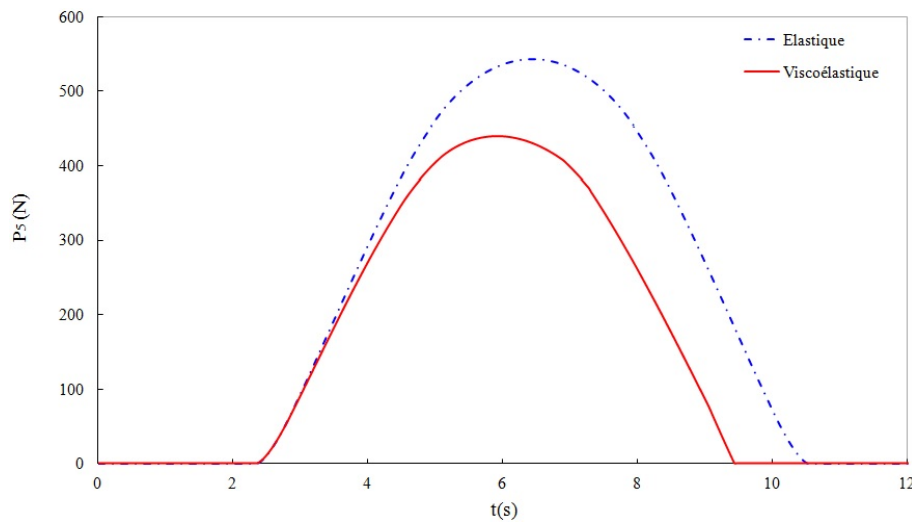


FIGURE 4.12 – Force de contact normale P_5 sur l'aspérité centrale 5 pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.

courbe est symétrique par rapport à l'instant où le déplacement au sommet de l'aspérité est maximal. Par contre, cette courbe est dissymétrique pour le cas du contact viscoélastique. La force normale atteint une valeur nulle plus tôt que dans le cas élastique. La valeur maximale de la force de contact locale est aussi plus petite pour le contact viscoélastique. Pour le cas viscoélastique, il existe une perte d'énergie au cours du contact. Au contraire, pour le contact élastique, l'énergie mécanique est conservée au cours du roulement.

La figure 4.13 montre la force normale au cours du contact sur chaque aspérité. Ce résultat indique que pour les aspérités au bord, la force normale au cours du contact est plus grande que le reste.

La figure 4.14 donne la force de résistance au roulement s'appliquant sur le pneumatique au cours du roulement sur les 9 aspérités sphériques. Comme dans le cas précédent, on trouve que, pour le cas du contact élastique, la valeur moyenne de la force de résistance au roulement est nulle $\overline{F_R} = 0$. Par contre, pour le contact viscoélastique, on obtient une courbe dissymétrique et la valeur moyenne de cette force est telle que $\overline{F_R} = -23,32$ N.

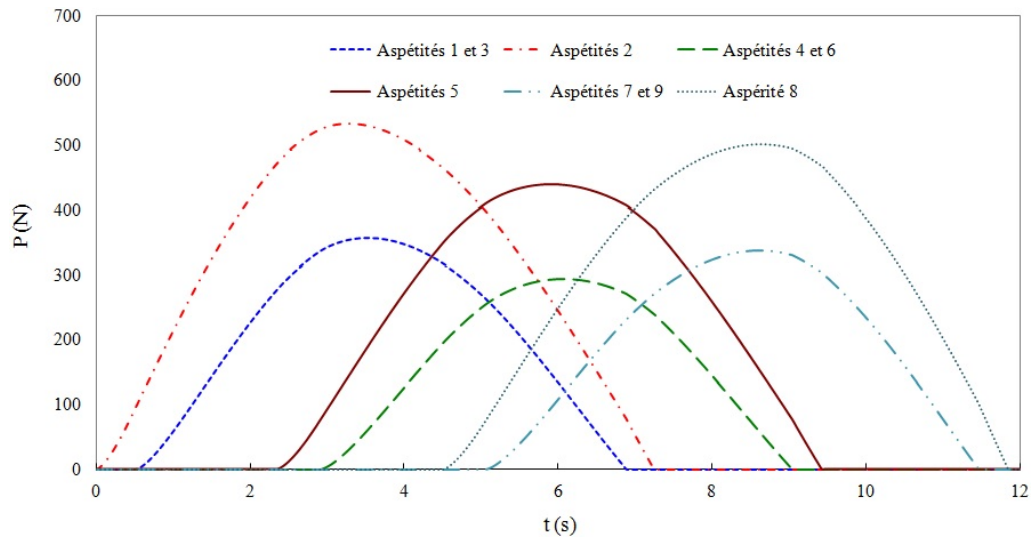


FIGURE 4.13 – Force normale au cours du contact pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.

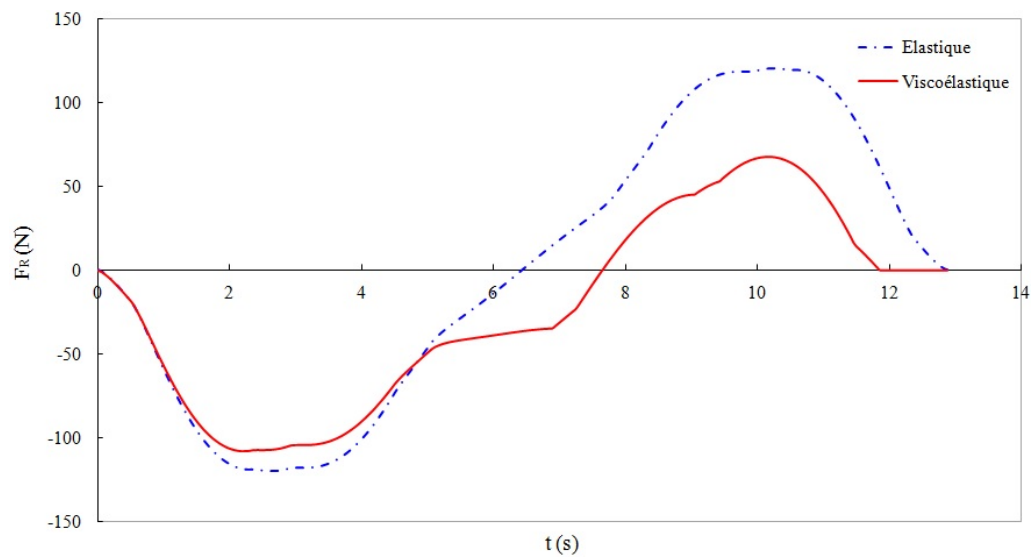


FIGURE 4.14 – Force de résistance au roulement F_R pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.

4.2.1.3 Roulement sur un ensemble de sphères à force globale P imposée

Les calculs sont ici réalisés pour une surface composée de plusieurs aspérités mais à force totale P imposée. La vitesse de roulement V est fixée à 0,01 m/s. Le chargement est tel qu'à l'instant $t = 0$, on impose une force P sur le pneumatique de forme sphérique.

$$P = P_0 \sin(2\pi \frac{t}{T}) \quad (4.60)$$

Cette procédure continue jusqu'à $t = T/4$, lorsque P atteint la valeur maximale $P_0 = 500$ N. Ensuite, la sphère roule avec la vitesse $V = 0,01$ m/s avec une force imposée $P = P_0 = 500$ N.

Géométrie de la surface en contact avec le massif La surface représentant la chaussée est composée de neuf aspérités sphériques identiques de rayon $r = 0,01$ m. Cette fois, les aspérités sont alignées sur une ligne dans la direction du roulement, comme illustré Figure 4.15. Tout les sommets des aspérités sont placés dans le même plan, c'est-à-dire :

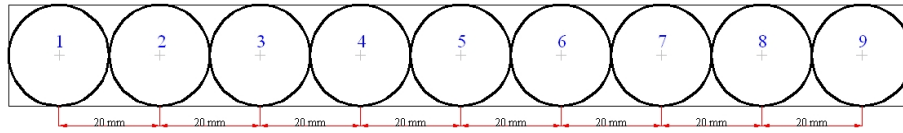
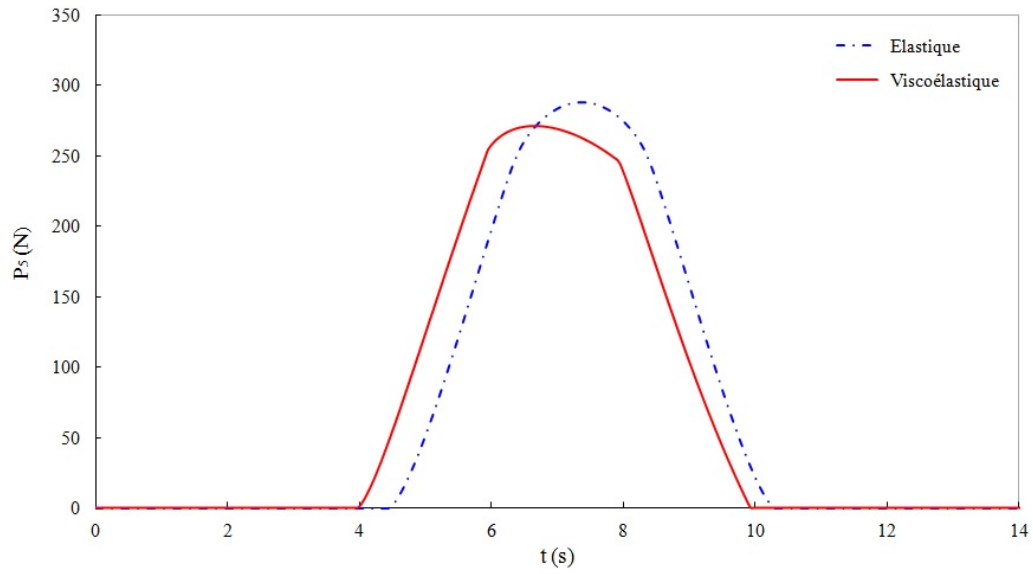
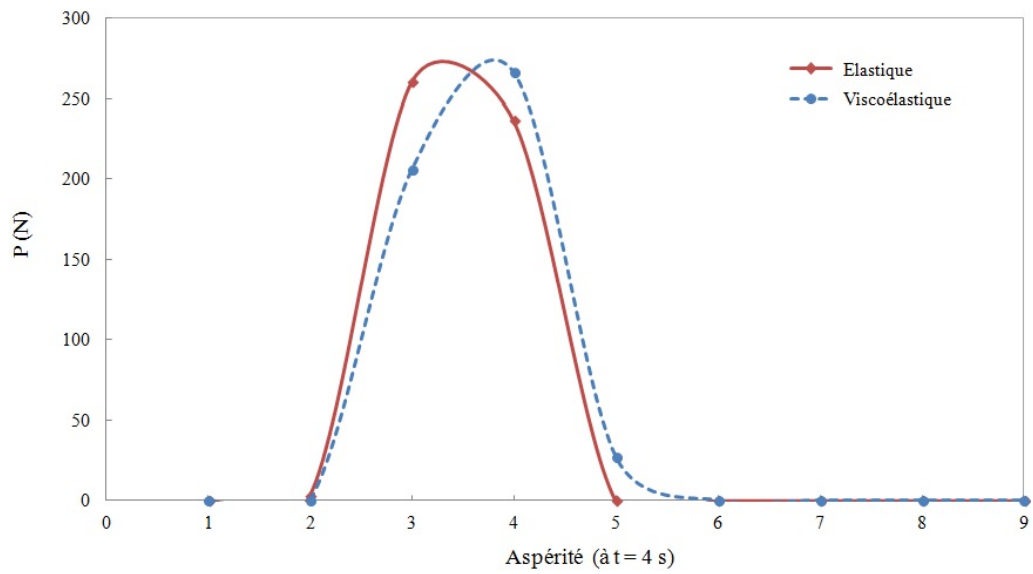


FIGURE 4.15 – Géométrie de la surface en contact avec la sphère.

$$\forall k \in [1, N], z_{c,k}^s = 0 \quad (4.61)$$

Résultats Comme pour le cas précédent, on trace Figure 4.16 la force de contact au sommet de l'aspérité centrale $k = 5$. La courbe de la force normale P_5 en fonction du temps est symétrique pour le cas élastique. Par contre, cette courbe est dissymétrique pour le cas du contact viscoélastique. Dans ce cas, on trouve aussi que le contact viscoélastique débute avant le contact élastique. Cela s'explique par la réponse de la pénétration δ dans le cas où la force normale totale P est imposée. Les différentes réponses de δ pour le contact élastique et viscoélastique amènent des différences de la zone de contact. La figure 4.17 montre le résultat de la force normale sur chaque aspérité à l'instant $t \approx 4$ s. Chaque point sur la courbe correspond à une force sur une aspérité. Le résultat sur l'aspérité 5 (correspondant au point 5) nous montre qu'elle est entrée dans la zone du contact à l'instant $t \approx 4$ s pour le cas viscoélastique ($P_5(t \approx 4s) > 0$). Pourtant, cette valeur est égale à zéro pour le cas du contact élastique, c'est-à-dire, à ce moment-là, l'aspérité 5 est encore hors de la zone de contact.

FIGURE 4.16 – Force normale P_5 sur l'aspérité 5.FIGURE 4.17 – Force normale sur chaque aspérité à l'instant $t \approx 4$ s.

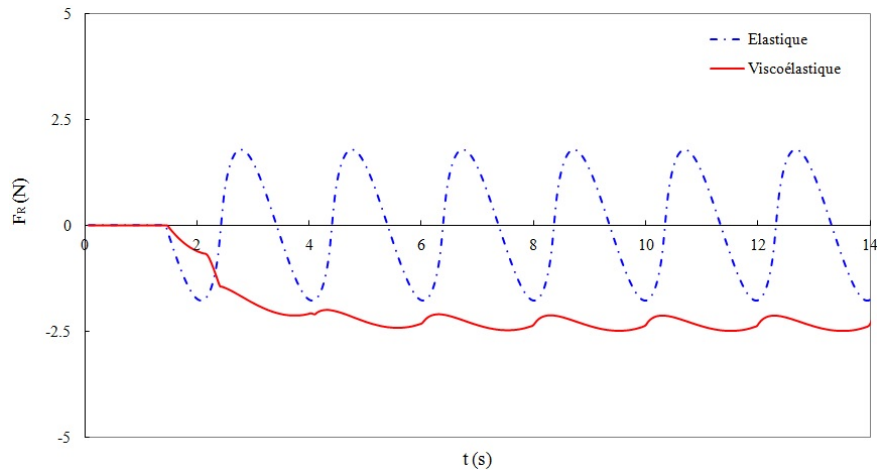


FIGURE 4.18 – Force de résistance au roulement F_R pour le contact entre un massif semi-infini de forme sphérique et 9 aspérités sphériques.

La figure 4.18 donne la force de résistance au roulement F_R en fonction du temps. Pour le cas élastique, la moyenne de la force de résistance au roulement est nulle, $\overline{F_R} = 0$. Par contre, dans le cas du contact viscoélastique, cette valeur est non nulle, $\overline{F_R} = -2,4$ N.

Ce résultat nous donne une courbe de forme périodique de la force résistance au roulement F_R . Cela est causé par le résultat de la force normale et par la période de la géométrie de la surface en contact avec la sphère. La figure 4.19 montre la périodicité de la force normale P_k au cours du contact. Pendant 1,5 s au début, sous l'effet du chargement, il

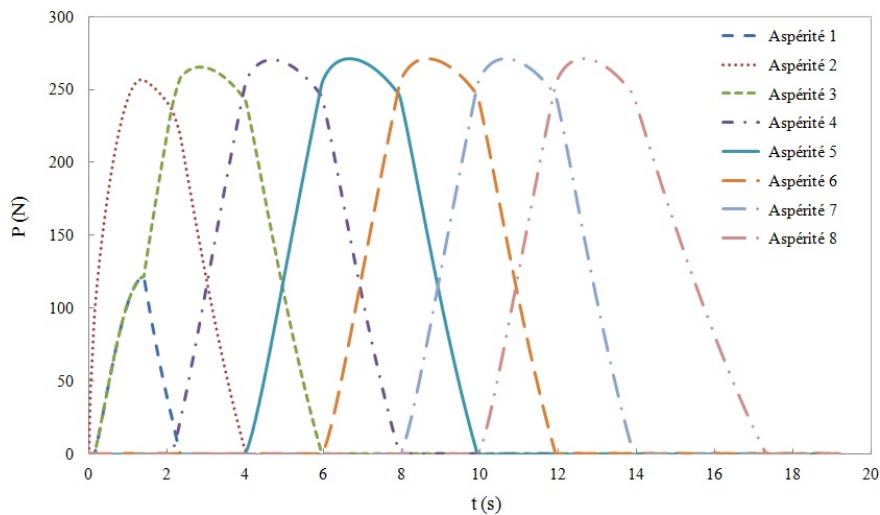


FIGURE 4.19 – Forces normales P_k sur chaque aspérité k au cours du contact.

n'y a que les trois aspérités 1, 2, et 3 dans la zone de contact. Après, la sphère roule sur

cette surface à la vitesse $V = 0,01 \text{ m/s}$ et les autres aspérités rentrent dans la zone de contact. Grâce à la géométrie périodique de la surface ci-dessus, on obtient une réponse de la force normale au cours du contact qui est aussi périodique.

4.2.1.4 Résistance au roulement en fonction de la vitesse

L'objet de cette dernière partie est de comparer les résultats de la méthode par approche multipoints linéarisée avec la Méthode d'Inversion de Matrice (MIM) développée au chapitre 3. Le but est d'évaluer la pertinence de cette méthode pour l'évaluation de la résistance au roulement en prenant le résultat de la MIM comme référence.

Description de la configuration de contact La surface en contact avec la sphère est composée de plusieurs rangées d'aspérités sphériques identiques (Figure 4.20). La dimension des aspérités est choisie suffisamment petite de façon à ce que cette surface soit assimilable à un plan lisse en comparaison avec la taille du pneumatique. Pour cela, on a choisi une surface avec 11 rangées d'aspérité identiques de rayon $r = 0,001 \text{ m}$. Les sommets des pointes sont tous à la même hauteur. Le massif en contact avec cette surface est une sphère viscoélastique de rayon $R = 0,15 \text{ m}$ avec les mêmes fonctions de relaxation et de fluage que précédemment, sauf pour la valeur du temps caractéristique de relaxation $\tau = 0,001 \text{ s}$. Les calculs sont effectués à déplacement imposée $\delta = 0,0042 \text{ m}$.

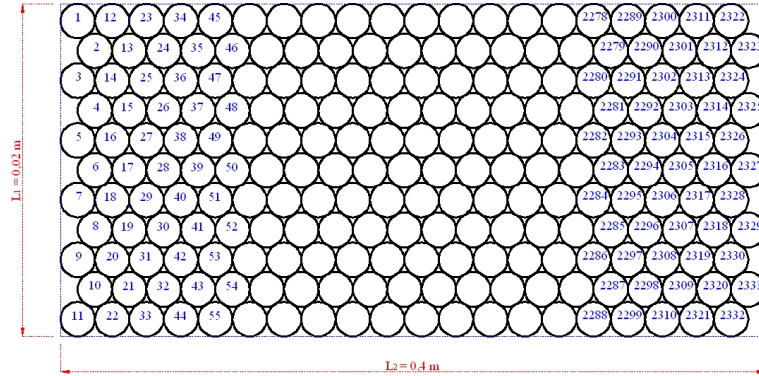


FIGURE 4.20 – Géométrie de la surface composée d'un grand nombre d'aspérités sphériques en contact avec le pneumatique de forme sphérique.

Comparaison de la résistance au roulement Les résultats des deux méthodes sont comparés figure 4.21. Chaque point sur la courbe correspond à une vitesse de roulement V avec la valeur du coefficient $a_0 \approx \sqrt{\delta R} = 0,025 \text{ m}$ [2]. Nous trouvons que les deux résultats sont très proches, ce qui valide bien la nouvelle approche linéarisée pour étudier le contact pneumatique/chaussée dans le cadre de la résistance au roulement.

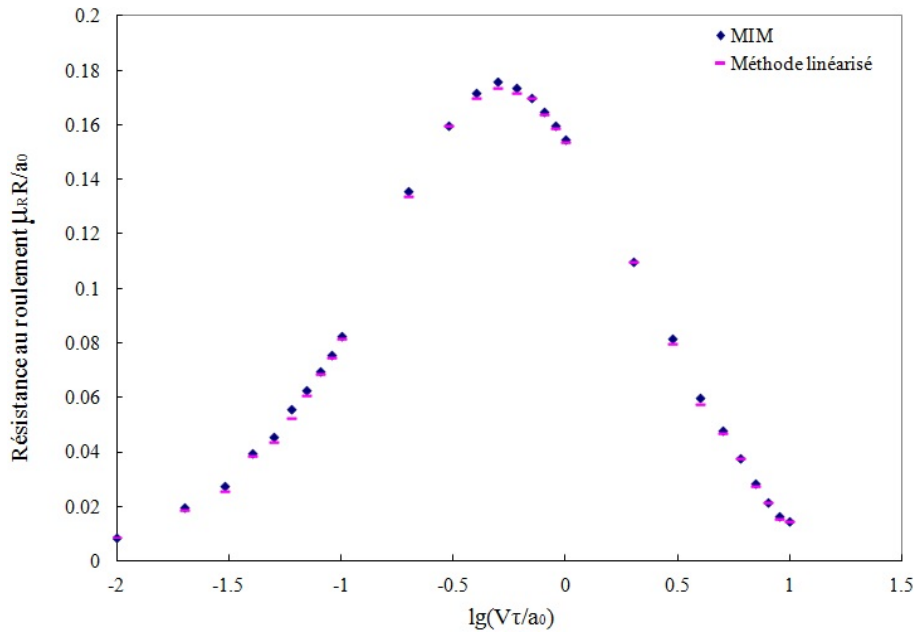


FIGURE 4.21 – Comparaison de la résistance au roulement obtenue par MIM et par méthode multipoints linéarisée.

4.2.2 Contact pour un massif ayant la forme d'un pneumatique

Les calculs précédents effectués dans des configurations simples permettent d'envisager la méthode dans le cas d'un massif ayant la géométrie d'un pneumatique lisse roulant sur une surface composée d'un grand nombre d'aspérités. Le pneumatique considéré est un

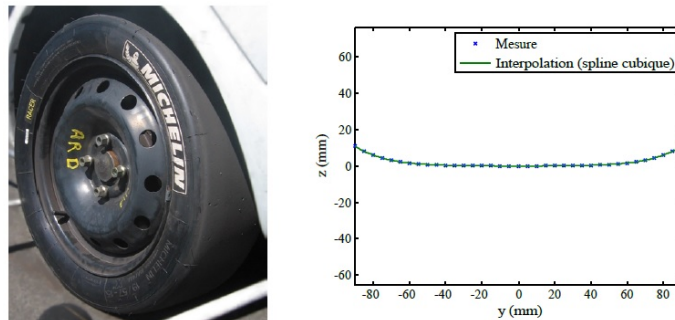


FIGURE 4.22 – Photographie du pneu lisse utilisé à gauche et profil transversal du pneu à droite (Cesbron, 2007) [44].

pneumatique lisse Michelin Racer Slick 186/57 R15 (Figure 4.22) de rayon $R = 0,284$ m. Il sera désigné par configuration « pneu lisse » dans le reste du mémoire. Lors de la thèse de Cesbron (2007), un profil de la surface du pneu non-déformé a été mesuré dans

le sens perpendiculaire à la direction de roulement à l'aide d'un capteur de déplacement laser. Le résultat obtenu est représenté Figure 4.22 et montre un écart de l'ordre d'une dizaine de millimètres entre le centre et les bords de la bande de roulement. La surface du pneu est ensuite générée par révolution du profil transversal autour du centre de roue (Figure 4.23 à gauche). La surface obtenue (Figure 4.23 à droite) est utilisée par la suite dans le modèle de contact pour tenir compte de la courbure du pneumatique. D'après le

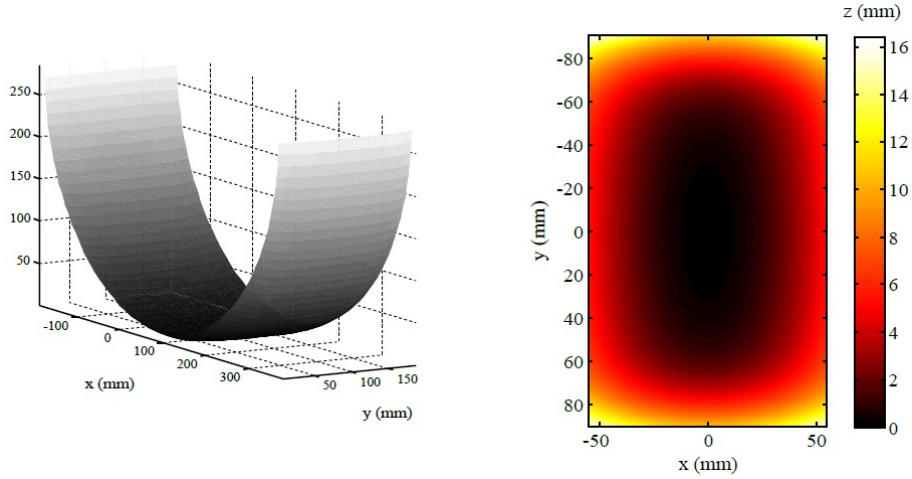


FIGURE 4.23 – Visualisation de la surface du demi-pneu lisse reconstruite à partir du profil transversal à gauche et surface du pneumatique lisse potentiellement en contact avec la chaussée à droite (Cesbron, 2007) [44].

constructeur, la rigidité du pneu de compétition utilisée est du même ordre de grandeur que celle d'un pneu standard pour véhicule léger. Le pneumatique est donc modélisé par un massif-semi infini élastique avec un module d'Young $E = 2,5$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,5$.

4.2.2.1 Roulement sur une chaussée composée d'aspérités sphériques

Géométrie de la surface en contact avec le massif : La surface représentant la chaussée est composée de neuf rangées d'aspérités sphériques identiques de rayon $0,01$ m comme illustré Figure 4.24. Les aspérités sont toutes à la même hauteur.

Type de chargement : Le chargement est tel qu'à l'instant $t = 0$, on impose une force P sur le pneumatique de forme sphérique.

$$P = P_0 \sin(2\pi \frac{t}{T}) \quad (4.62)$$

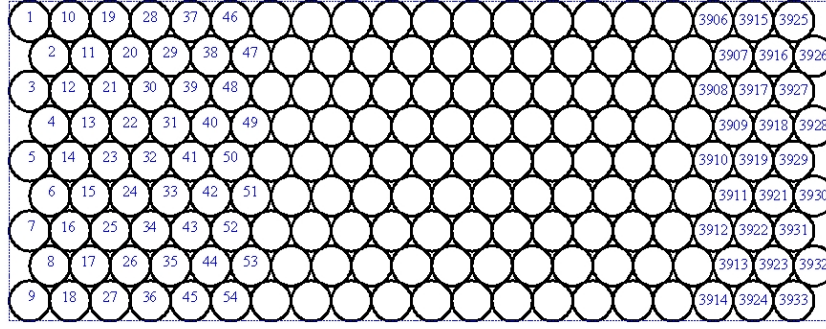
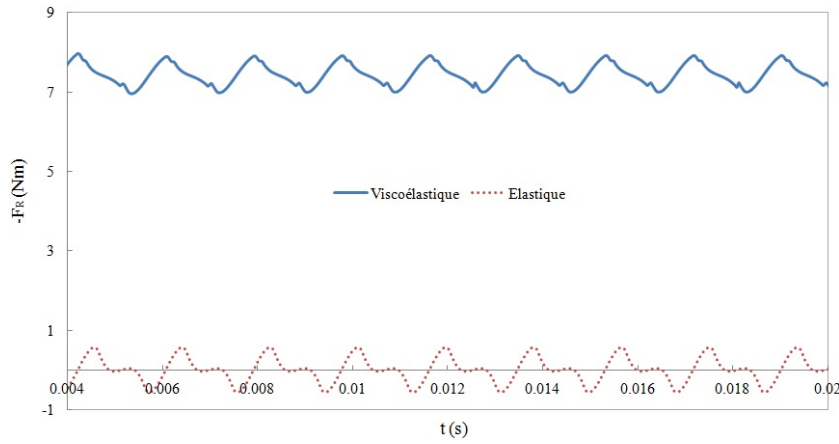


FIGURE 4.24 – Géométrie de la surface en contact avec le pneu.

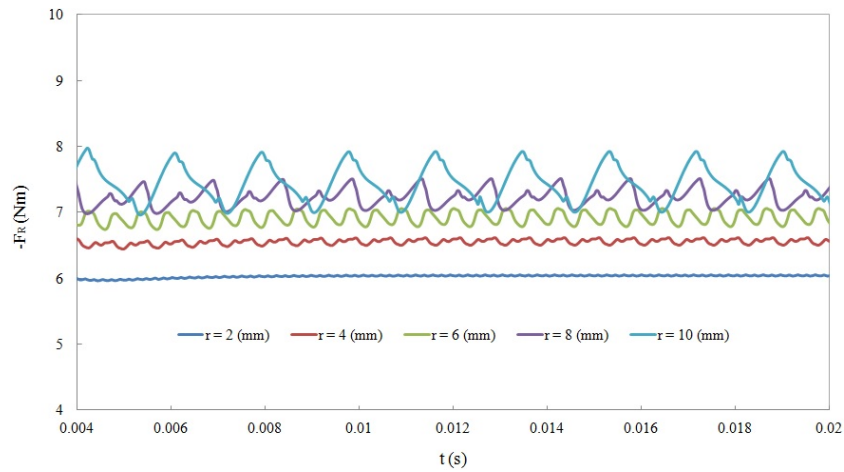
Cette procédure continue jusqu'à $t = T/4$, lorsque P atteint la valeur maximale $P_0 = 500$ N. Ensuite, la sphère roule avec la vitesse $V = 0,01$ m/s avec une force imposée $P = P_0 = 500$ N.

Résultats : D'après les résultats de la figure 4.25, on trouve que la valeur moyenne de la force de résistance au roulement est nulle $\overline{F_R} = 0$ dans le cas du contact élastique, alors que $\overline{F_R} = -7,47$ N pour le contact viscoélastique.

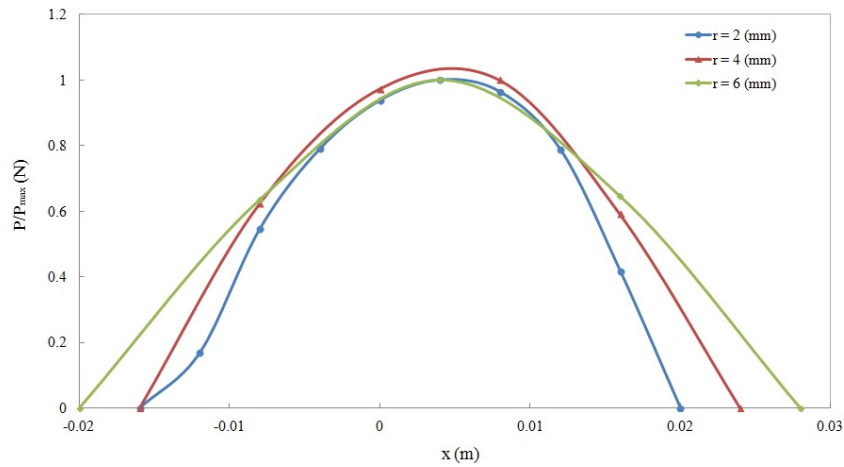
FIGURE 4.25 – Force résistance F_R au cours du contact.

Quand la surface en contact avec le pneu est plus lisse, on trouve que la valeur de la force de résistance au roulement F_R tend vers une valeur constante (Figure 4.26). Dans ce cas, quand le nombre de rangées d'aspérités de la surface augmente, cette valeur tend vers -6 N pour le cas viscoélastique et 0 pour le cas contact élastique (Tableau 4.1).

Ces résultats correspondent à la vitesse $V = 0,01$ m/s. La valeur maximale de la force de contact sur chaque aspérité est atteinte avant la fin de la phase de chargement. Dans ce cas, il existe donc une perte d'énergie sur chaque aspérité.

FIGURE 4.26 – Force résistance F_R dépend du rayon r de l'aspérité.

r (mm)	2	4	6	8	10
$-\bar{F}_R$ (N)	6,17	6,69	7,04	7,32	7,59

TABLE 4.1 – Valeur moyenne de la force résistance \bar{F}_R correspondant à chaque valeur du rayon r de l'aspérité.FIGURE 4.27 – Force normale à l'instant T suivre l'axe O_x

r (mm)	2	4	6
P_{max} (N)	1,466	5,284	11,311

TABLE 4.2 – Valeur maximale de la force normale P_{max} correspondant à chaque valeur du rayon r de l'aspérité.

La figure 4.27 donne le résultat des forces normales P_k à l'instant T suivant l'axe O_x pour les différentes tailles de l'aspérité. On obtient Tableau 4.2 que plus la taille des aspérités est grande, plus la force normale maximale au cours du contact est grande.

4.2.2.2 Roulement sur une chaussée réelle multi-aspérités

Le calcul sur une surface composée d'un grand nombre d'aspérités sphériques permet d'utiliser la méthode dans le cas d'une chaussée réelle. Les paramètres de calcul sont les mêmes que précédemment, seule la géométrie de la surface de la chaussée est changée et la force normale totale imposée $P = 2000$ N est constante au cours du temps. Le pneu roule à la vitesse $V = 1$ m/s sur cette surface.

Géométrie de la surface en contact avec le massif Dans la cadre de la thèse de Cesbron (2007)[44], une méthode de calcul de contact basée sur une description multi-aspérités de la surface a été proposée. Pourtant, la méthode de Cesbron ne prend en compte que la partie émergente de la surface, oubliant des zones potentiellement en contact. D'ailleurs, les aspérités définies par la méthode de Cesbron posent des problèmes de convergence dans le calcul de contact multi-aspérités, dont une des raisons pourraient être une définition incomplète des lois de contact [52]. Après, G. Dubois (2011) [52] a développé une méthode de partitionnement de surface de chaussée pour traiter ces problèmes. Le partitionnement repose sur la description de la chaussée comme un ensemble d'aspérités connexes, c'est-à-dire un partitionnement de la chaussée [52] :

$$S = \bigcup_{k=1}^N S_k \quad \text{et} \quad \bigcap_{k=1}^N S_k = \emptyset \quad (4.63)$$

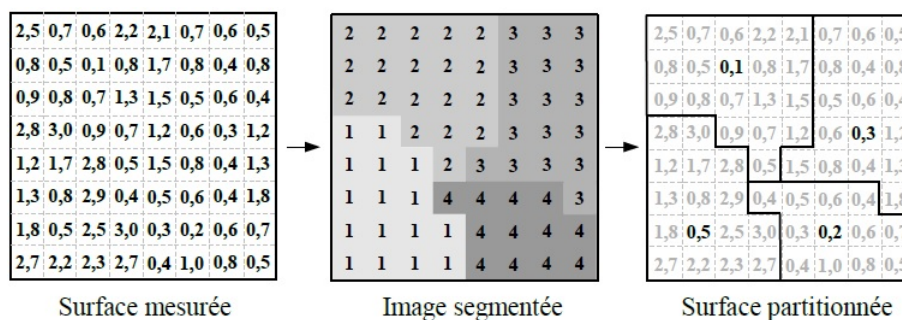


FIGURE 4.28 – Principe du partitionnement [52].

La figure 4.28 présente le principe de partitionnement d'une surface de chaussée réelle décrite à partir d'un relevé 3D de sa texture. Le principe du partitionnement est alors

de diviser la totalité de la surface en N aspérités $S_k(x_k; y_k; z_k)$. Chaque aspérité est alors décrite par son indice k , sa frontière avec les autres aspérités (en trait continu noir à droite sur la figure 4.28), les pixels qui composent sa surface et son sommet $(x_k^s; y_k^s; z_k^s)$ [52]. Après avoir déterminé les paramètres de chaque aspérité comme la hauteur de son sommet, sa position, sa géométrie, il reste à chercher la loi de contact pour chaque aspérité de chaussée. Dans des conditions de chargement faibles les lois de contact pour des aspérités de géométries académiques (cylindre, sphère, cône) et de géométrie quelconque, figure 4.29, peuvent être décrites par la relation suivante :

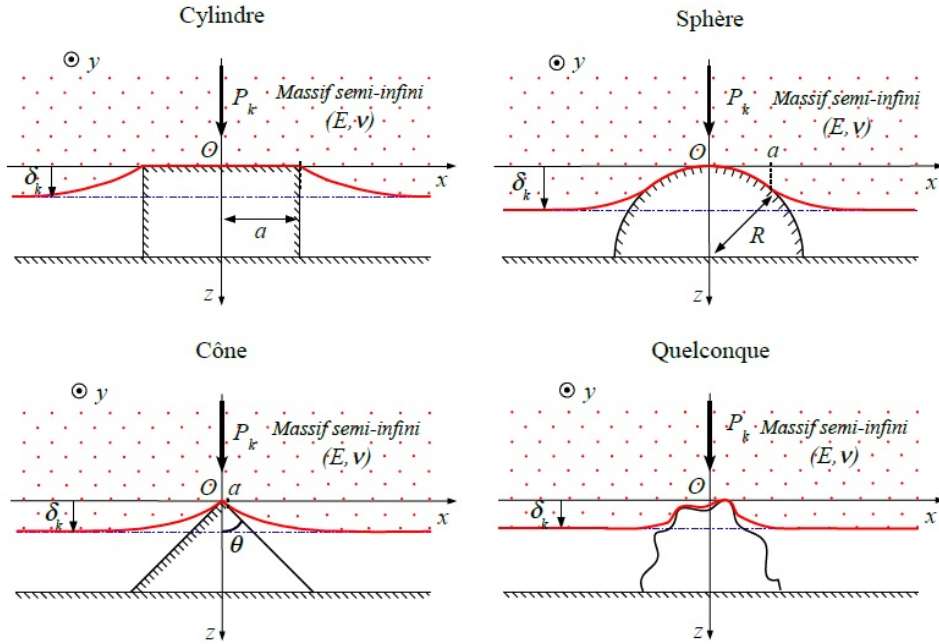


FIGURE 4.29 – Contact ponctuel pour différentes aspérités de géométrie académique (cylindre, sphère, cône) et de géométrie quelconque [52].

$$P_k = C_k E^* \delta_k^{\gamma_k} \quad (4.64)$$

avec

$$E^* = \frac{E}{1 - \nu^2} \quad (4.65)$$

où le paramètre C_k dépend de la géométrie et des dimensions de la pointe et le paramètre γ_k est caractéristique de la forme de la pointe. Pourtant avec cette loi, il y a des problèmes possibles. La convergence de la méthode de résolution utilisée par l'approche multi-aspérités n'est pas forcément assurée dès lors qu'une aspérité possède un paramètre C_k élevé ($C_k > 5$), en lien avec un paramètre γ_k élevé ($\gamma_k > 2$), ou bien lorsque deux aspérités géographiquement proches ont des paramètres élevés. Donc dans le cadre de la thèse de G. Dubois, il a proposé une loi de contact plus générale pour résoudre ce problème :

$$\forall k \in [1, N], P_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_k \leq 0 & \text{non-contact} \\ C_k E^* \delta_k^{\gamma_k} & \text{si } 0 < \delta_k \leq d_k & \text{loi de puissance} \\ K_k E^* \delta_k^{\gamma_k} + C_k E^* d_k^{\gamma_k} - K_k E^* d_k & \text{si } d_k < \delta_k & \text{loi linéaire} \end{cases}$$

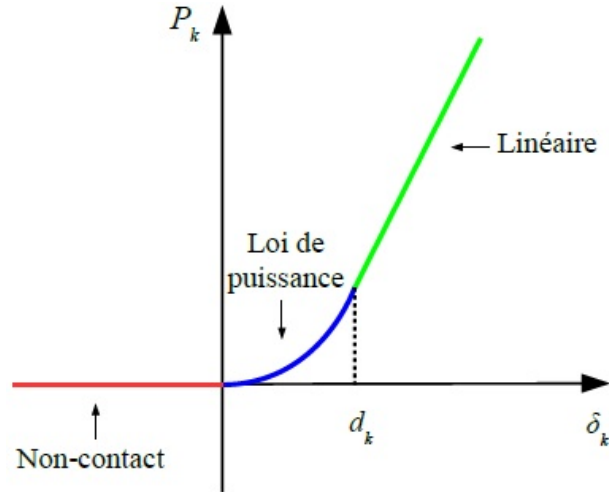


FIGURE 4.30 – *Loi de contact normal pour une aspérité quelconque* [52].

Les paramètres C_k et γ_k expriment les mêmes propriétés que pour la loi de contact d'aspérités axisymétriques de géométries simples, tandis que les paramètres K_k représentent des raideurs normalisées. Les paramètres d_k sont calculés de la façon suivante [52] :

$$d_k = x \quad \text{telque} \quad \frac{\partial P_k}{\partial \delta_k}(x) = 0,95 \lim_{\delta_k \rightarrow \infty} \frac{\partial P_k}{\partial \delta_k} \quad (4.66)$$

Dans cette partie, on travaille sur les deux surfaces de chaussée A et $E2$ [52] illustrées dans la figure 5.20



FIGURE 4.31 – *Surfaces de la chaussée A (à gauche) et E2 (à droite)* [52]

Résultats : D'après le résultat de la figure 4.32, on trouve que la valeur moyenne de la force de résistance au roulement est nulle $\overline{F_R} = 0$ dans le cas du contact élastique, alors que $\overline{F_R} = -5$ N dans le cas viscoélastique.

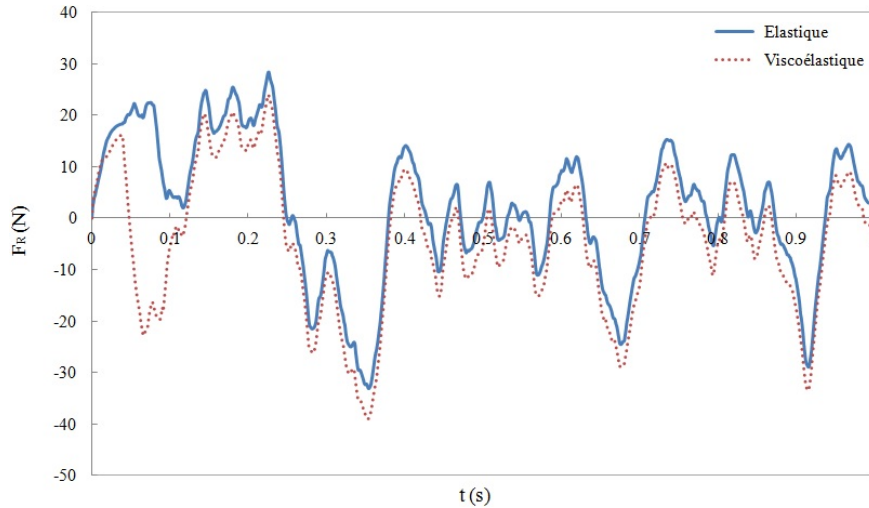


FIGURE 4.32 – Force résistance F_R au cours du contact.

La figure 4.33 montre les résultats de la force de la résistance au roulement sur les différentes chaussées à la vitesse $V = 10$ m/s. Sur la chaussée A, les tailles des aspérités sont plus grandes et plus variées par rapport à celles sur la surface de la chaussée E2. La force résistance au roulement F_R dans le cas où le pneu roule sur la chaussée E2 est donc plus stable par rapport à celle du où cas dans lequel le pneu roule sur la chaussée A.

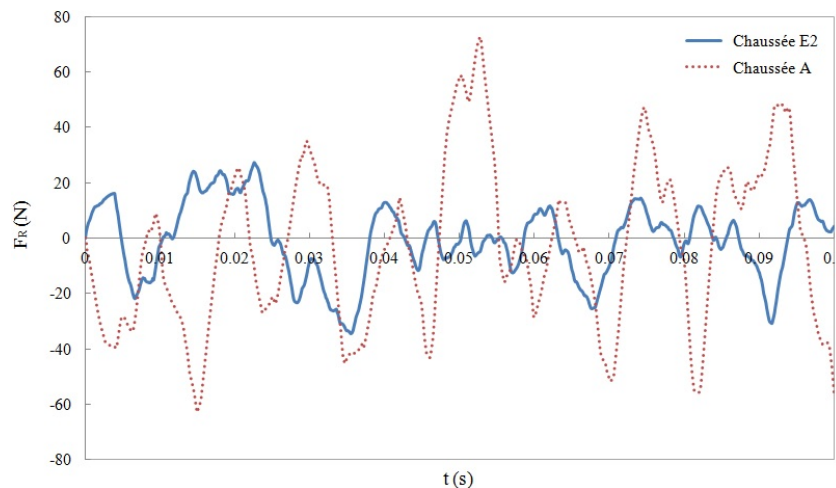


FIGURE 4.33 – Force de résistance au roulement F_R pour les différentes surfaces de chaussée.

La figure 4.34 montre la force normale P_{507} sur l'aspérité $k = 507$ au cours du contact entre le pneumatique et les deux surfaces différentes (A et $E2$) de chaussée. Ce résultat nous donne la même conclusion que précédemment, à savoir que les courbes de la force normale en fonction du temps sont dissymétriques dans le cas du contact viscoélastique.

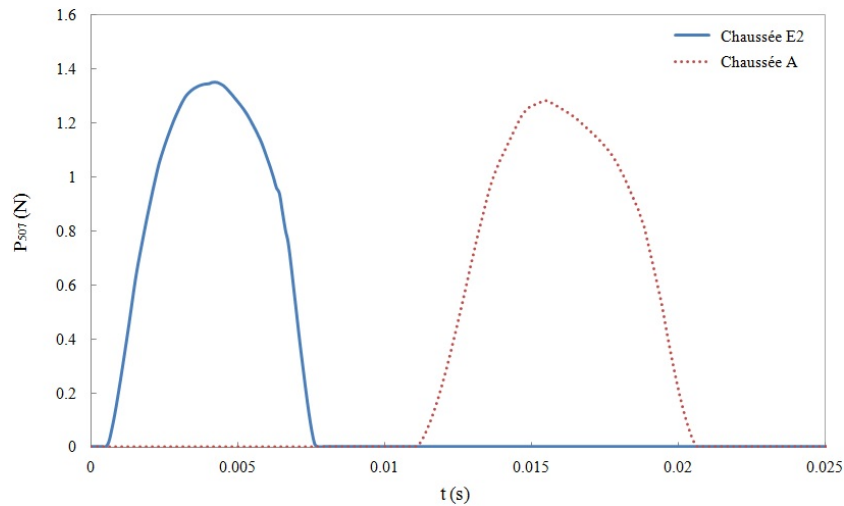


FIGURE 4.34 – Force normale P_{507} en fonction du temps sur l'aspérité 507 sur la surface de chaque chaussée.

4.3 Conclusions

La méthode développée au cours de la thèse propose une approche linéarisée pour le contact multipoints avec roulement. Les calculs sont appliqués d'abord pour le contact entre un massif semi-infini de géométrie sphérique roulant sur une seule aspérité sphérique, puis sur un ensemble d'aspérités sphériques dans les cas du contact élastique ou viscoélastique. Pour le contact élastique, le résultat ne dépend pas de la vitesse de la roue et il n'y a pas de perte d'énergie. Dans ce cas, la valeur moyenne de la force de résistance au roulement au cours du temps est nulle. Au contraire, pour le contact viscoélastique, la résistance au roulement dépend de la vitesse du massif et la valeur moyenne de la force de résistance au roulement au cours du temps est différente de zéro. La méthode linéarisée est aussi validée par comparaison avec les résultats obtenus par la MIM développée au chapitre 2.

Ensuite, la méthode s'applique à un massif semi-infini ayant la géométrie d'un pneu lisse afin de traiter le cas où une voiture roule sur une chaussée réelle. Les résultats obtenus dans ce cas indiquent une influence de la taille des aspérités de chaussée sur la force de

résistance au roulement. Plus les aspérités sont petites, plus la force de résistance est stable et tend vers une valeur constante quand la surface devient lisse.

Contact multipoints avec la suspension

Sommaire

5.1	Equation et problèmes de roulement avec la suspension	89
5.2	Application aux surfaces régulières et à celle d'une chaussée réelle	92
5.2.1	Contact entre une sphère et une géométrie régulière	92
5.2.2	Contact entre un pneu et une géométrie régulière	97
5.2.3	Contact entre un pneu et une chaussée réelle	102
5.3	Conclusions	105

5.1 Equation et problèmes de roulement avec la suspension

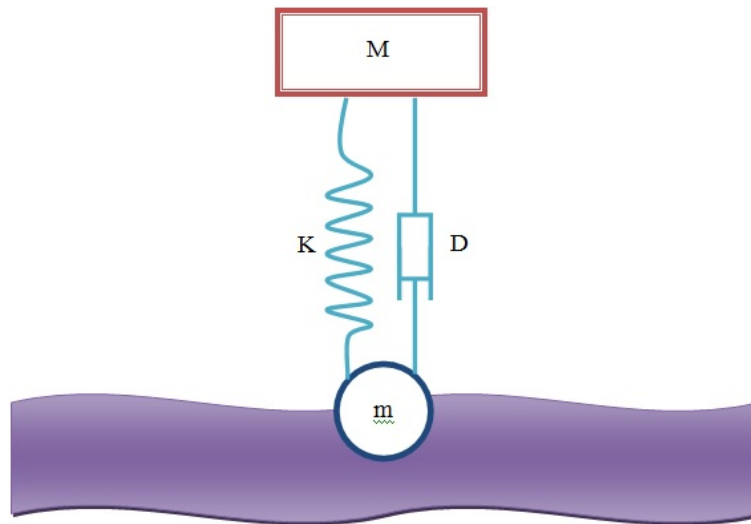


FIGURE 5.1 – *Objet roulant sur la chaussée.*

Dans ce chapitre, on considère un véhicule roulant à une vitesse constante V sur un sol rigide et irrégulier. Chaque roue et la charge qu'elle porte peuvent être modélisées

par un oscillateur linéaire à 2 degrés de liberté. La petite masse m et la grande masse M représentent respectivement la masse de la roue et la partie de la masse du véhicule qu'elle porte. Dans ce cas, les forces extérieures appliquées sur ce système sont des forces de gravité $P = Mg$ et $p = mg$ ainsi que les excitations de la chaussée sur la base du pneu. La relation entre ces excitations et le déplacement de la roue est non linéaire.

A l'instant t , on note $P_k(t)$ la force normale sur l'aspérité k dans la zone de contact, $\delta(t)$ le déplacement global du pneu et $\Delta'(t)$ le déplacement de la masse M .

La force appliquée sur le ressort $f_K(t)$ et celle appliquée sur l'amortisseur $f_D(t)$ à l'instant t sont les suivantes :

– pour le ressort

$$f_K(t) = K(\Delta'(t) - \delta(t)) \quad (5.1)$$

– pour l'amortisseur

$$f_D(t) = D(\dot{\Delta}'(t) - \dot{\delta}(t)) \quad (5.2)$$

Les équations d'équilibre des deux masses sont données par le système d'équations suivant

$$\begin{cases} m\ddot{\delta}(t) - D(\dot{\Delta}'(t) - \dot{\delta}(t)) - K(\Delta'(t) - \delta(t)) = mg - \sum_{k=1}^N P_k(t) \\ M\ddot{\Delta}'(t) + D(\dot{\Delta}'(t) - \dot{\delta}(t)) + K(\Delta'(t) - \delta(t)) = Mg \end{cases} \quad (5.3)$$

Rappelons la loi de contact multipoint sous forme discrétisée :

$$\Delta P_k^i = \begin{cases} E^* f'_k(\delta_k(t_{i-1}))[-\Delta' \delta^i - \Delta' z_{p,k}^{s,i} - G_{kl} \Delta' P_l^i] & \text{pour le contact élastique} \\ I_k^i + \psi(0) f'_k(\delta_k(t_{i-1}))[-\Delta' \delta^i - \Delta' z_{p,k}^{s,i} - J_k^i - \phi(0) G_{kl} \Delta' P_l^i] & \text{pour le contact viscoélastique} \end{cases}$$

où I_k^i et J_k^i sont des constantes à l'instant t_i et définies par :

$$I_k^i = \int_0^{t_{i-1}} (\psi(t_i - \tau) - \psi(t_{i-1} - \tau)) \frac{d}{d\tau} [f_k(\delta_k(\tau))] d\tau \quad (5.4)$$

$$J_k^i = \int_0^{t_{i-1}} (\phi(t_i - \tau) - \phi(t_{i-1} - \tau)) \frac{d}{d\tau} \left[\sum_{l=1}^N T_{kl} P_l(\tau) \right] d\tau \quad (5.5)$$

Pour raison de simplification, on notera δ_i , Δ'_i et P_k^i à la place de $\delta(t_i)$, $\Delta'(t_i)$ et $P_k(t_i)$ à l'instant t_i . Les expressions discrétisées de la vitesse et de l'accélération des deux masses sont alors données par :

$$\dot{\delta}_i = \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{dt}, \quad \dot{\Delta}'_i = \frac{\Delta'_i - \Delta'_{i-1}}{dt} \quad (5.6)$$

et

$$\ddot{\delta}_i = \frac{\delta_i - 2\delta_{i-1} + \delta_{i-2}}{dt^2}, \quad \ddot{\Delta}'_i = \frac{\Delta'_i - 2\Delta'_{i-1} + \Delta'_{i-2}}{dt^2} \quad (5.7)$$

En injectant ces expressions dans le système équation (5.3), on obtient

$$\begin{cases} m \frac{\delta_i - 2\delta_{i-1} + \delta_{i-2}}{dt^2} + D \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{dt} - D \frac{\Delta'_i - \Delta'_{i-1}}{dt} - K(\Delta'_i - \delta_i) = mg - \sum_{k=1}^N P_k^i \\ M \frac{\Delta'_i - 2\Delta'_{i-1} + \Delta'_{i-2}}{dt^2} + D \frac{\Delta'_i - \Delta'_{i-1}}{dt} - D \frac{\delta_i - \delta_{i-1}}{dt} + K(\Delta'_i - \delta_i) = Mg \end{cases} \quad (5.8)$$

Après quelques réarrangements des termes dans ces équations, on obtient

$$\begin{cases} \sum_{k=1}^N P_k^i + [\frac{m}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K]\delta_i - [\frac{2m}{dt^2} + \frac{D}{dt}]\delta_{i-1} + \frac{m}{dt^2}\delta_{i-2} - [\frac{D}{dt} + K]\Delta'_i + \frac{D}{dt}\Delta'_{i-1} = mg \\ [\frac{M}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K]\Delta'_i - [\frac{2M}{dt^2} + \frac{D}{dt}]\Delta'_{i-1} + \frac{M}{dt^2}\Delta'_{i-2} - [\frac{D}{dt} + K]\delta_i + \frac{D}{dt}\delta_{i-1} = Mg \end{cases} \quad (5.9)$$

Notons N le nombre d'aspérités dans la zone de contact, nous avons à résoudre un système de $N + 2$ équations avec $N + 2$ inconnues $P_1(t), P_2(t), \dots, P_N(t), \delta(t)$ et $\Delta'(t)$

$$\begin{cases} P_k^i = f_k(\delta_k^i, z_{p,k}^{s,i}, P_l^i) \\ \sum_{k=1}^N P_k^i + [\frac{m}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K]\delta_i - [\frac{2m}{dt^2} + \frac{D}{dt}]\delta_{i-1} + \frac{m}{dt^2}\delta_{i-2} - [\frac{D}{dt} + K]\Delta'_i + \frac{D}{dt}\Delta'_{i-1} = mg \\ [\frac{M}{dt^2} + \frac{D}{dt} + K]\Delta'_i - [\frac{2M}{dt^2} + \frac{D}{dt}]\Delta'_{i-1} + \frac{M}{dt^2}\Delta'_{i-2} - [\frac{D}{dt} + K]\delta_i + \frac{D}{dt}\delta_{i-1} = Mg \end{cases} \quad (5.10)$$

où f_k est une fonction décrivant la loi de contact pour l'aspérité k . Cette fonction dépend de la géométrie de l'aspérité. Par exemple, la loi de contact pour un poinçon cylindrique, une pointe sphérique et une pointe conique est donnée par les relations suivantes :

- pour un cylindre :

$$P = 2E^* a \delta \quad (5.11)$$

- pour une sphère :

$$P = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R} \delta^{\frac{3}{2}} \quad (5.12)$$

- pour un cône :

$$P = \frac{2}{\pi} E^* \tan \theta \delta^2 \quad (5.13)$$

Si on note Δ la déformation du ressort, alors $\Delta = \Delta' - \delta$. Pour résoudre ce problème, on utilise la méthode linéarisée présentée dans le chapitre précédent.

5.2 Application aux surfaces régulières et à celle d'une chaussée réelle

5.2.1 Contact entre une sphère et une géométrie régulière

Dans un premier temps, la géométrie du massif semi-infini en roulement à la vitesse V est assimilée à une sphère de rayon $R = 0,3$ m. Cette sphère est attachée au massif de masse $M = 200$ kg par l'intermédiaire d'un ressort de raideur $K = 200000$ N/m et d'un amortisseur d'amortissement $D = 200$ Ns/m en parallèle. La masse de la sphère est $m = 10$ kg (voir figure. 5.1).

Le massif déformable peut avoir un comportement élastique ou viscoélastique :

- pour le cas élastique, le massif a un module d'Young $E = 15$ MPa et un coefficient de Poisson $\nu = 0,5$;
- pour le cas viscoélastique, on utilise le modèle de Kelvin-Voigt défini au chapitre 2, pour lequel les fonctions de fluage ϕ et de relaxation ψ peuvent s'écrire sous la forme :

$$\phi(t) = \frac{1}{E_\infty} - \frac{E_0 - E_\infty}{E_0 E_\infty} e^{-\frac{E_\infty}{E_0} \frac{t}{\tau_r}} \quad (5.14)$$

$$\psi(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau_r}} \quad (5.15)$$

où les modules élastiques sont tels que $E_0 = 15$ MPa et $E_\infty = 7,5$ MPa, le coefficient de Poisson ν est égal à 0,5 et $\tau_r = 1$ s.

Surface en contact avec le massif : la surface représentant une chaussée "modèle" est composée de plusieurs rangées d'aspérités sphériques identiques de rayon $r = 1$ cm comme la figure 5.2 le montre. Les sphères sont placées à la même hauteur.

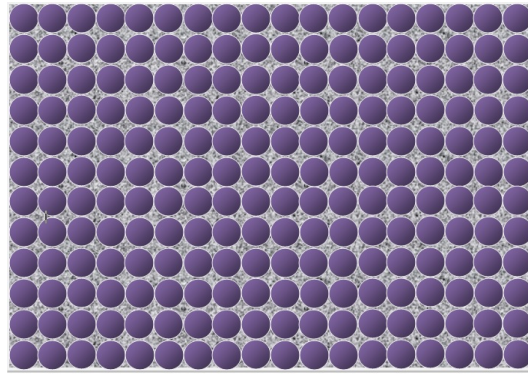


FIGURE 5.2 – Géométrie de la surface en contact avec la sphère.

Résultats : La sphère roule à une vitesse $V = 2,5 \text{ m/s}$. Les figures 5.3 et 5.4 montrent l'évolution de la force de résistance au roulement, de la déformation du ressort Δ et du déplacement de la sphère δ au cours du temps. La force F_R varie autour d'une valeur

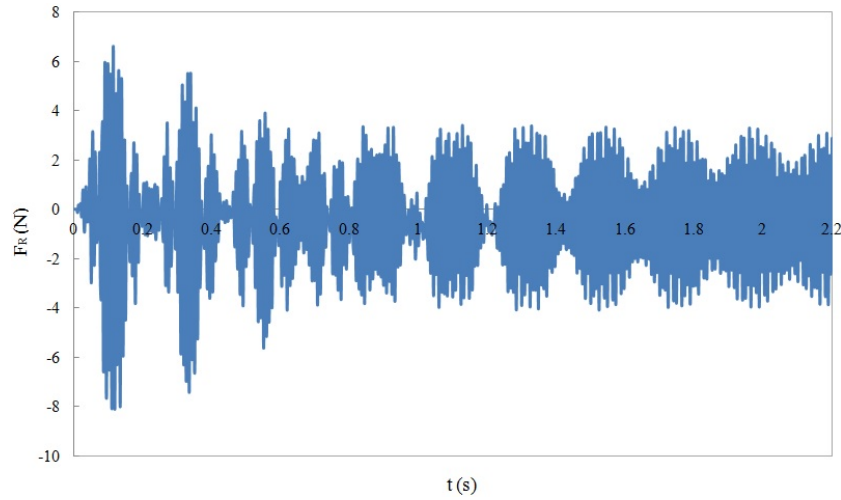


FIGURE 5.3 – Force de résistance au roulement F_R au cours du contact

moyenne de $-0,43 \text{ N}$ et devient stable après $1,5 \text{ s}$. la période transitoire est due au choc

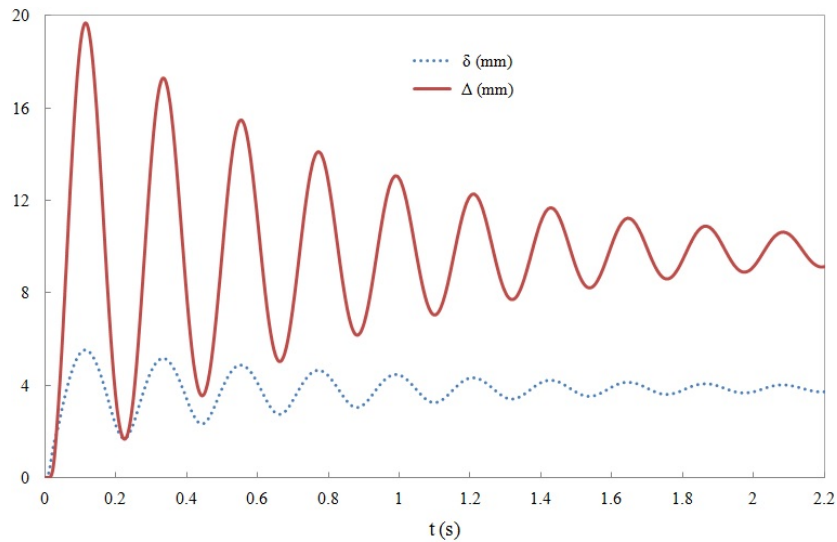


FIGURE 5.4 – Déplacement du ressort Δ et de la sphère δ au cours du contact

quand la sphère entre en contact avec la surface rugueuse.

La figure 5.5 montre une comparaison avec le cas du contact sans suspension. A cette vitesse de roulement, la force moyenne de résistance au roulement qui est de $-0,43 \text{ N}$

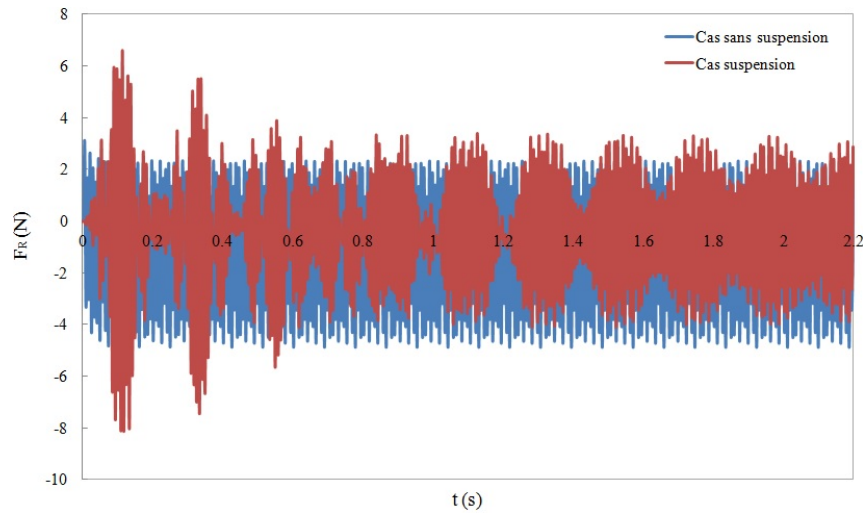


FIGURE 5.5 – *Comparaison de la force de résistance au roulement F_R avec ou sans suspension.*

dans le cas avec suspension est inférieure à la valeur moyenne qui est de $-1,15\text{ N}$ dans le cas sans suspension en valeur absolue.

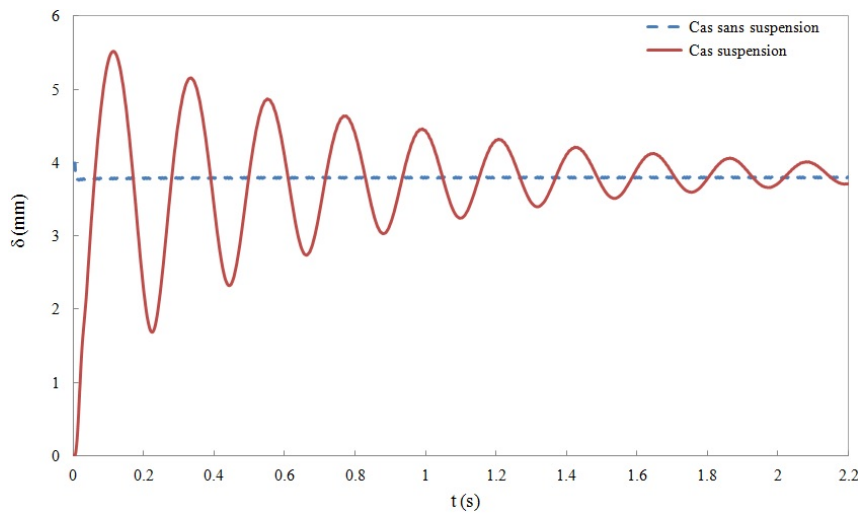


FIGURE 5.6 – *Comparaison de la déformation δ avec ou sans suspension.*

La figure 5.6 montre l'évolution du déplacement δ de la petite masse m . Sa valeur varie autour d'une valeur moyenne de $3,8\text{ mm}$. Le trait discontinu montre la valeur imposée du déplacement dans le cas sans suspension.

La figure 5.7 montre l'évolution de la force normale totale P_{totale} au cours du contact. La valeur moyenne de cette force est égale 2050 N . Rappelons que cette valeur était de $(2000$

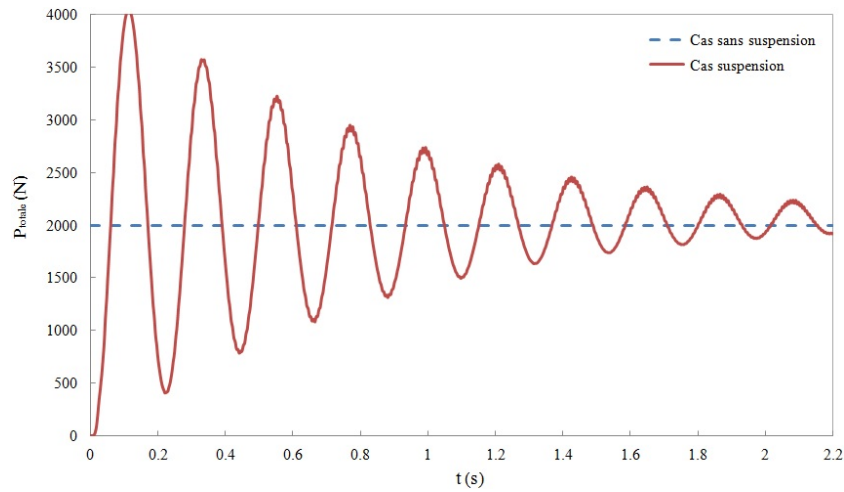


FIGURE 5.7 – Comparaison de la force totale P_{totale} avec ou sans suspension.

N) pour le cas du contact sans suspension. Les résultats sont similaires à ceux de la figure 5.6.

La figure 5.8 donne le résultat dans le cas où le ressort du système suspendu est très rigide (donc la valeur de la raideur du ressort $K \rightarrow \infty$). Le résultat est proche de celui de la situation sans suspension.

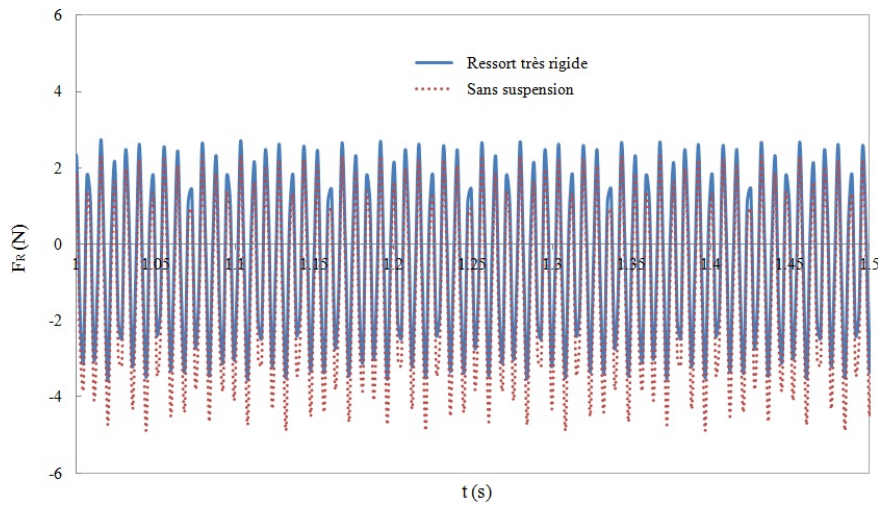


FIGURE 5.8 – Force de résistance au roulement F_R dans le cas où le ressort est très rigide.

La figure 5.9 montre une distribution des forces normales sur les aspérités en contact avec la sphère suivant la direction du roulement $O - X$. On peut observer la dissymétrie de cette distribution. En effet, les forces de contact sont plus importantes sur les aspérités dans la partie à l'avant de la sphère que dans la partie à l'arrière.

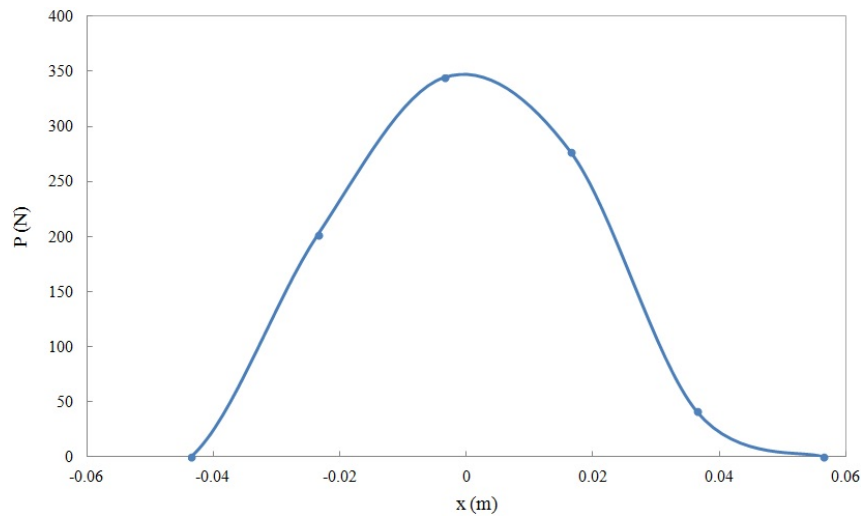


FIGURE 5.9 – Force normale P à l'instant T suivant l'axe $O - X$.

Pour étudier l'influence de la vitesse de roulement sur la force de résistance au roulement, on a fait varier cette vitesse de 32 m/s à $0,000125 \text{ m/s}$ selon l'expression $V = 2^{5-n} \text{ m/s}$. Les petites valeurs de n correspondent donc aux grandes valeurs de la vitesse de roulement et vice versa.

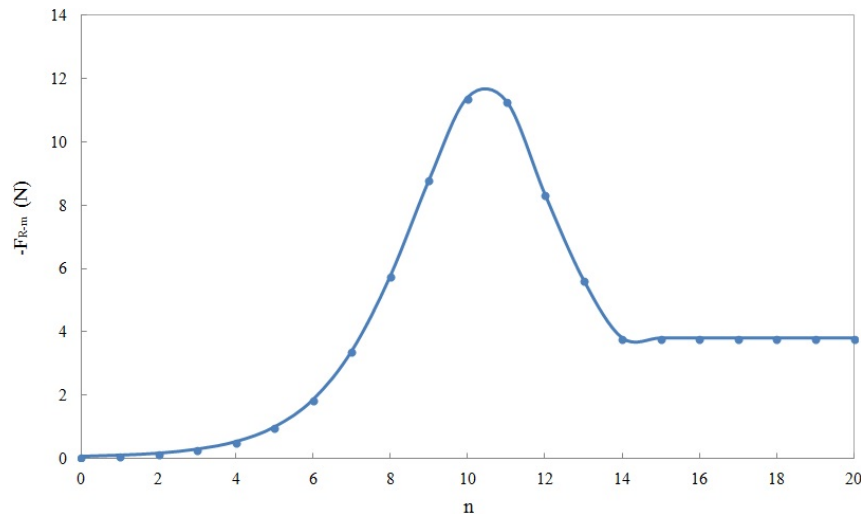


FIGURE 5.10 – Influence de la vitesse V de la sphère sur la valeur moyenne de la force de résistance au roulement F_{R-m} ($V = 2^{5-n} \text{ m/s}$).

La figure 5.10 montre que, à grande vitesse, la valeur moyenne de la force de résistance au roulement F_{R-m} est proche de zéro. Quand la vitesse de roulement décroît cette valeur moyenne en valeur absolue croît jusqu'à une valeur maximale de $11,4 \text{ N}$ à la vitesse

$V \approx 0,03 \text{ m/s}$, $|F_{R-m}|$ puis décroît pour se stabiliser à une valeur de $3,8 \text{ N}$.

Enfin, la figure 5.11 montre une comparaison entre les cas du contact élastique (le bleu) et du contact viscoélastique (la rouge) à la vitesse $V = 0,25 \text{ m/s}$.

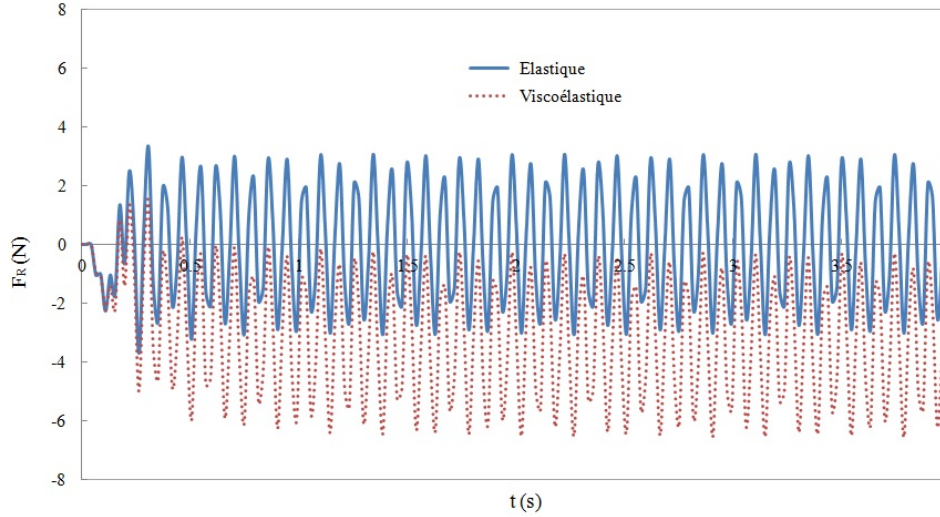


FIGURE 5.11 – Comparaison le contact élastique et viscoélastique à $V = 0,25 \text{ m/s}$.

5.2.2 Contact entre un pneu et une géométrie régulière

Paramètres des calculs : Dans cette section, on utilise un pneu lisse de rayon $R = 0,284 \text{ m}$ et de module d'Young $E_0 = 5 \text{ MPa}$, $E_\infty = 2,5 \text{ MPa}$ comme dans le chapitre 4. La masse de pneu est de 10 kg . Ce pneu est suspendu par un ressort de raideur $K = 50000 \text{ N/m}$ et un amortisseur d'amortissement $D = 200 \text{ Ns/m}$ en parallèle (voir figure 5.1). La surface de la chaussée en contact avec le pneu dans ce cas est une chaussée composée de plusieurs rangées d'aspérités sphériques et identiques de rayon $r = 1 \text{ cm}$.

La hauteur z de la surface du massif est une fonction sinusoïdale de x définie par :

$$z(x) = z_0 \left(1 + \sin \left(\frac{2n\pi x}{V_x T} - \frac{\pi}{2} \right) \right) \quad (5.16)$$

où $V_x T = L_x$ est le chemin parcouru et n est le nombre de périodes. Dans cette partie, on fixe $z_0 = 2 \text{ mm}$.

La sphère roule à une vitesse $V_x = 1 \text{ m/s}$ sur cette surface. Les autres paramètres sont les mêmes que ceux donnés précédemment.

Résultats : La figure 5.12 montre l'évolution de la force de résistance au roulement. La courbe en pointillés représente le profil de la chaussée. On constate qu'après une période

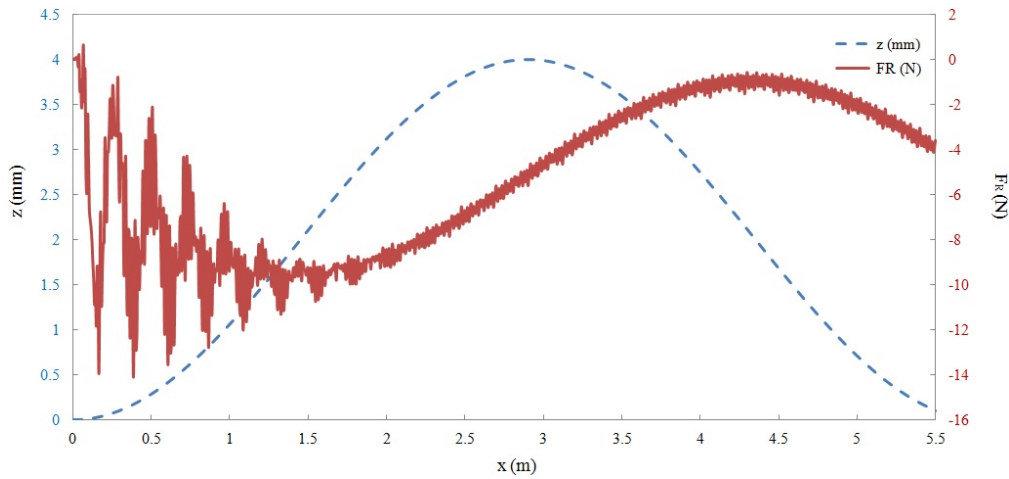


FIGURE 5.12 – Force résistance F_R en fonction du temps au lieu de la hauteur z .

transitoire d'environ 2 secondes, la force de résistance au roulement suit aussi une fonction sinusoïdale mais elle est en retard par rapport au profil de la chaussée.

La figure 5.13 montre l'évolution de la force normale totale P_{totale} au cours du contact dans deux situations soit la hauteur des aspérités identique (b), soit cette hauteur suit une fonction sinusoïdale (a). On constate que les deux courbes se superposent.

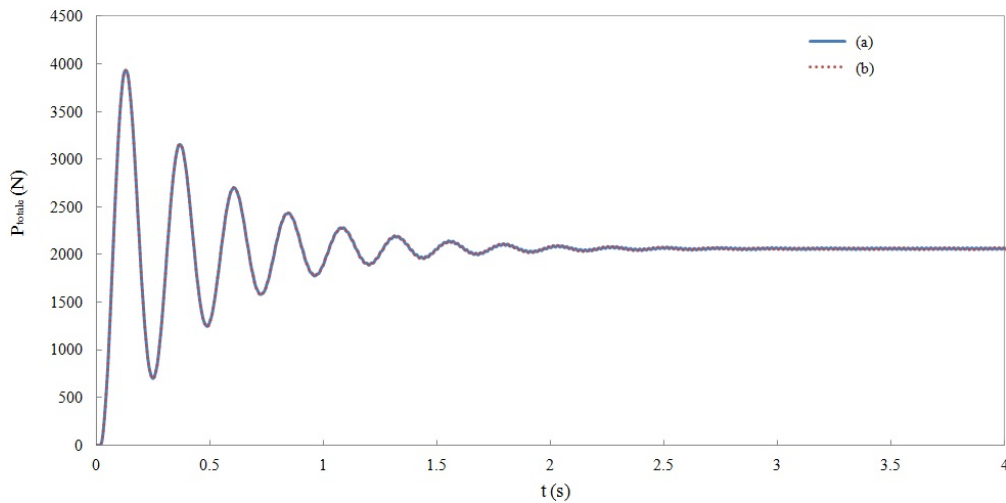


FIGURE 5.13 – Comparaison la force P_{totale} pour les deux cas : (a) surface de chaussée géométrie sinusoïdale - (b) hauteur $z = 0$.

La figure 5.14 montre le mouvement du pneu δ et l'évolution de la déformation du ressort Δ . Dans ce résultat, on trouve aussi que le mouvement du pneu δ est une fonction sinusoïdale.

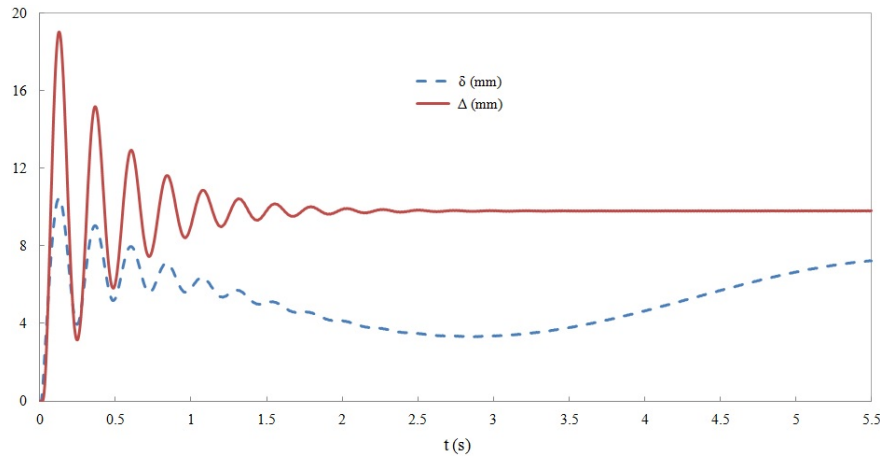


FIGURE 5.14 – Déplacement du ressort Δ et du pneu δ au cours du contact.

La figure 5.15 montre la distribution des forces de contact sur les aspérités situées sur l'axe $O - X$ dans la direction du roulement. Cette distribution est dissymétrique par rapport l'axe passant par le centre de la sphère O . La zone de contact dans ce cas est d'environ 10 cm. À ce moment, la valeur maximale de la force normale est atteinte au point O et cette valeur est égale à 200 N.

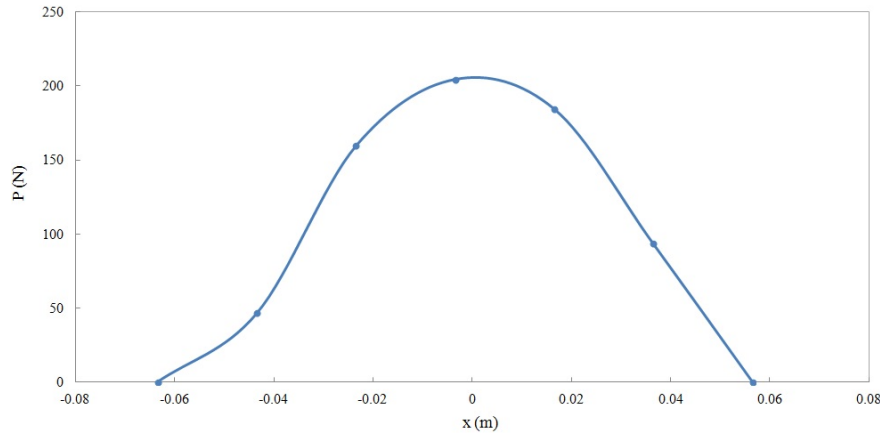


FIGURE 5.15 – Force normale P à l'instant T suivant l'axe $O - X$.

L'influence de la longueur d'onde sur la force de la résistance au roulement F_R est également étudiée. Pour ce faire, on fait varier la variable n . Plus la valeur de n est petite, plus la longueur d'onde est grande et vice versa.

La figure 5.16 montre deux exemples de surfaces dont la longueur d'onde est le double de l'autre. On observe que plus la longueur d'onde est petite, plus l'amplitude de la variation de la force de résistance au roulement est grande.

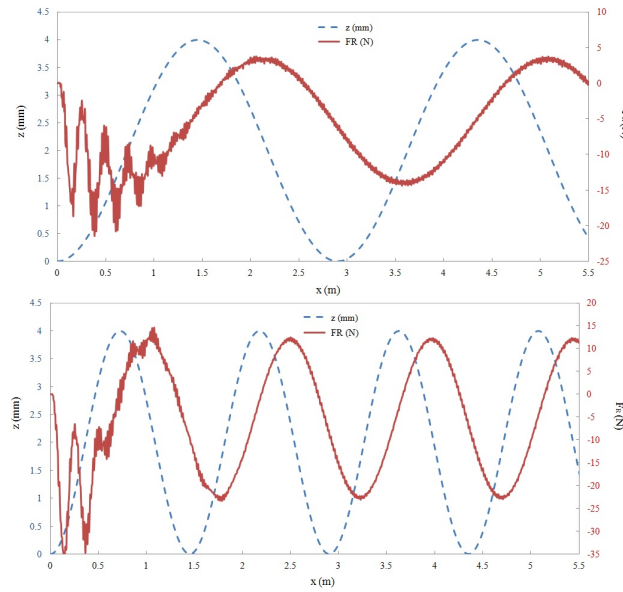


FIGURE 5.16 – Force de résistance au F_R au cours du contact pour différentes longueurs d'onde de chaussée.

La figure 5.17 montre l'influence de la longueur d'onde de la surface sur la valeur moyenne de la force de résistance au roulement. Quand n augmente (c'est-à-dire la longueur d'onde

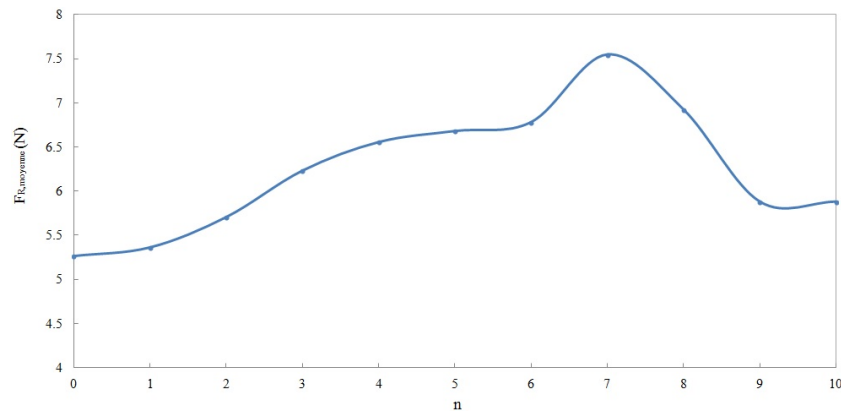


FIGURE 5.17 – Force résistance moyenne $\overline{F}_{R,moyenne}$ en fonction du nombre de la période de z .

diminue), la valeur moyenne de la force de résistance au roulement croît, atteint une valeur maximale égale à $7,5 \text{ N}$ pour $n = 7$ ($\lambda = 0,42 \text{ m}$), puis elle se met à décroître.

L'étude de l'influence de la valeur de raideur K du ressort a également été menée. Pour ce faire, on fait varier cette valeur de 10000 N/m à 200000 N/m . La figure. 5.18 montre l'influence de la raideur K sur le résultat de la force de résistance au roulement F_R avec

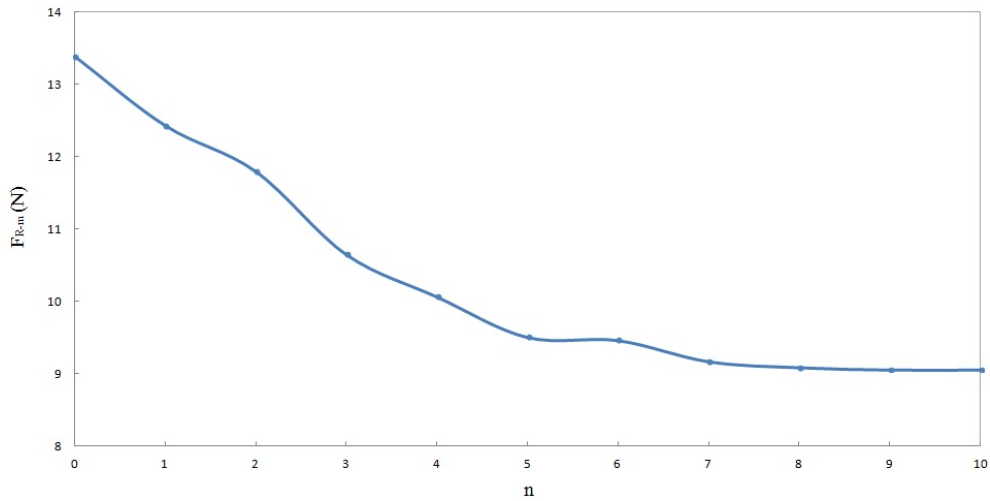


FIGURE 5.18 – Force de résistance au roulement F_{R-m} en fonction de la raideur K de ressort.

$K = n \times 20000 \text{ N/m}$ si n supérieur ou égale à 1 et $K = 10000 \text{ N/m}$ si $n = 0$. Dans cette figure, la force de résistance au roulement F_{R-m} est la valeur absolue maximale de la force de résistance au roulement pour $t > 2 \text{ s}$.

La figure 5.19 montre l'évolution de la force de résistance au roulement pour trois valeurs différentes de la raideur du ressort.

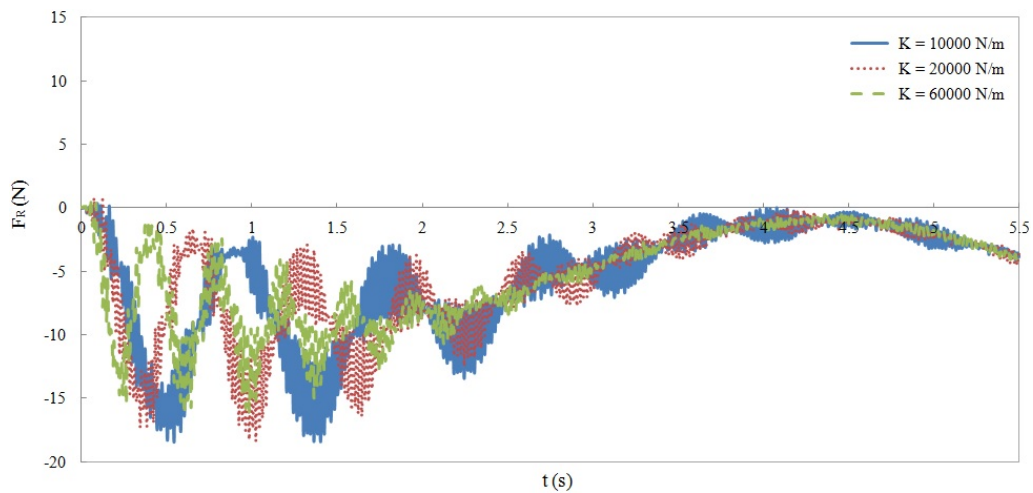


FIGURE 5.19 – Force de résistance au roulement F_R pour trois raideurs K du ressort.

5.2.3 Contact entre un pneu et une chaussée réelle

5.2.3.1 Loi de contact d'aspérité quelconque d'une chaussée réelle

Rappelons la loi de contact pour une seule pointe de forme quelconque à fort chargement (*Dubois*, 2012)[52] (contact élastique) :

$$\forall k \in [1, N], P_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_k \leq 0 & \text{non-contact} \\ C_k E^* \delta_k^{\gamma_k} & \text{si } 0 < \delta_k \leq d_k & \text{loi de puissance} \\ K_k E^* \delta_k^{\gamma_k} + C_k E^* d_k^{\gamma_k} - K_k E^* d_k & \text{si } d_k < \delta_k & \text{loi linéaire} \end{cases}$$

où les coefficients C_k et γ_k sont liés à la géométrie de l'aspérité, tandis que le paramètre K_k représente une raideur.

Pour le contact viscoélastique, cette loi s'écrit sous la forme suivante :

$$\forall k \in [1, N], P_k = \begin{cases} 0 & \text{si } \delta_k \leq 0 & \text{non-contact} \\ C_k \psi(0) f(\delta_k, \gamma_k) & \text{si } 0 < \delta_k \leq d_k & \text{loi de puissance} \\ K_k \psi(0) f(\delta_k, \gamma_k) + C_k \psi(0) d_k^{\gamma_k} - K_k \psi(0) d_k & \text{si } d_k < \delta_k & \text{loi linéaire} \end{cases}$$

où $\psi(t)$ est la fonction de relaxation du matériau viscoélastique. Dans ce cas, en utilisant le modèle de Maxwell, on a :

$$\psi(t) = E_\infty + (E_0 - E_\infty) e^{-\frac{t}{\tau}} \quad \text{Relaxation} \quad (5.17)$$

où $E_0 = 5 \text{ MPa}$, $E_\infty = 2,5 \text{ MPa}$ et $\tau = 1 \text{ s}$.

Dans cette partie, on travaille sur les deux surfaces de chaussée A et $E2$ [52] illustrées dans la figure 5.20

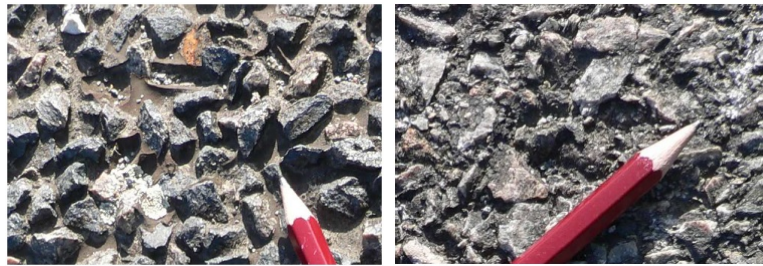


FIGURE 5.20 – Surfaces de la chaussée A (à gauche) et $E2$ (à droite) [52].

5.2.3.2 Résultats

Dans ce cas, le pneu roule à une vitesse constante $V = 1 \text{ m/s}$ sous une force normale P imposée, $P_{impose} = 2000 \text{ N}$. La figure 5.21 montre l'évolution de la force de résistance au roulement et celle de la force normale totale P_{totale} au cours du temps. Sous l'effet de la suspension et de l'entrée en contact, la force de résistance au roulement oscille autour

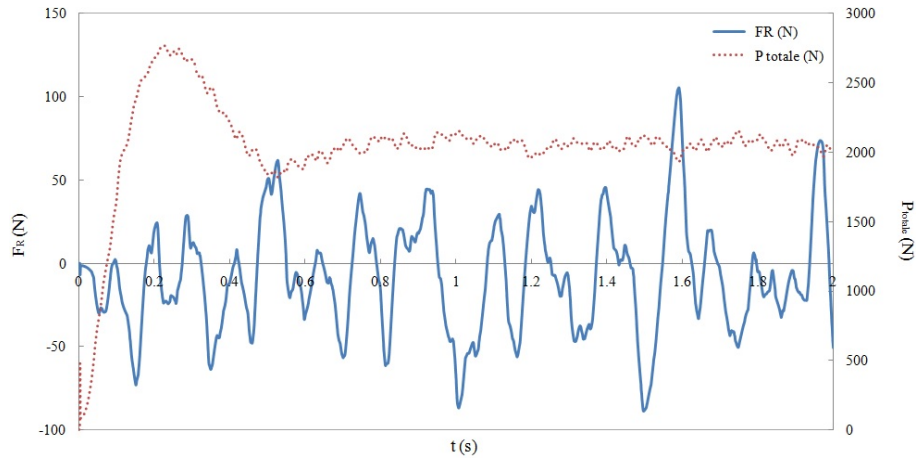


FIGURE 5.21 – Force de résistance au roulement F_R et force normale totale P_{totale} au cours du contact.

d'une valeur moyenne de -8 N , alors que la valeur moyenne de la force normale totale est égale à 2000 N .

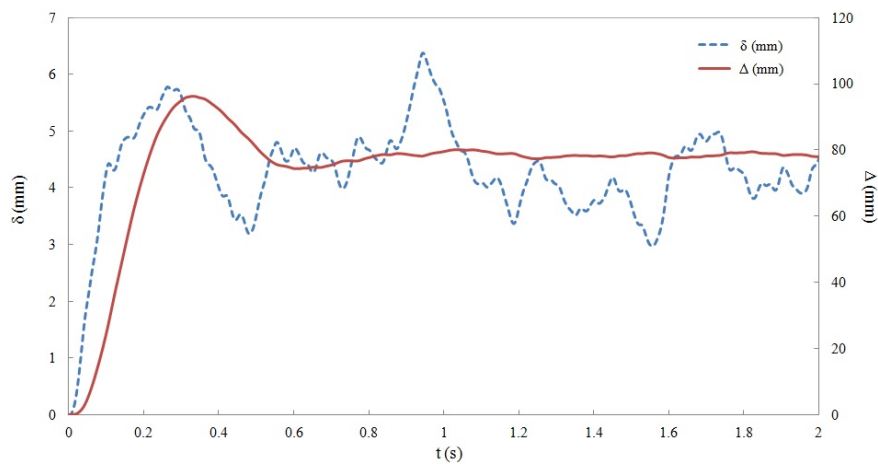


FIGURE 5.22 – Déplacement du ressort Δ et du pneu δ au cours du contact.

La figure 5.22 montre le mouvement de la sphère et l'évolution de la déformation du ressort. Dans ce cas, la valeur de la déformation du ressort est égale à 8 cm .

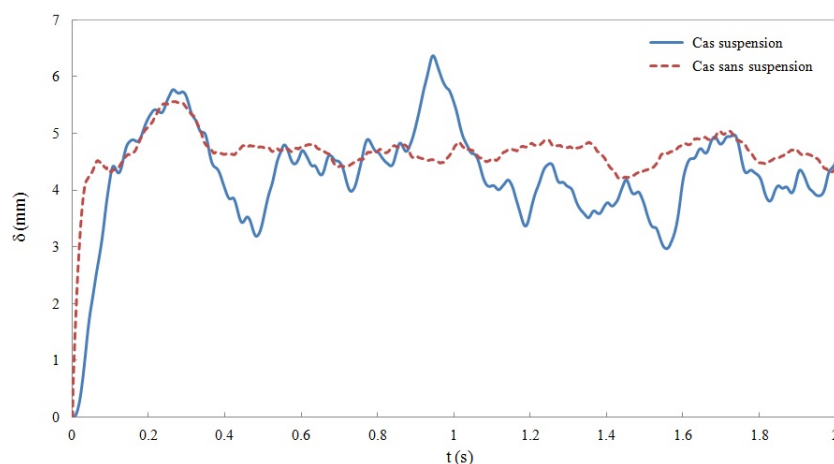


FIGURE 5.23 – Comparaison de la déformation du pneu δ avec ou sans suspension.

Dans la figure 5.23, on compare le mouvement de la sphère dans deux situations différentes : l'une sans suspension, l'autre avec suspension. Pour le contact sans suspension, le mouvement de la sphère est plus stable que dans le cas avec suspension.

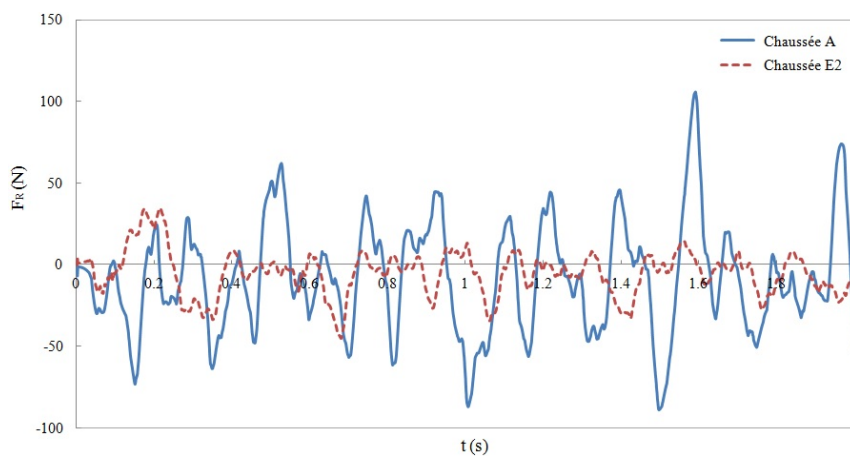


FIGURE 5.24 – Force de résistance au roulement F_R pour les différentes surfaces de chaussée.

La figure 5.24 compare le mouvement de la sphère sur les deux surfaces de chaussée réelle A et $E2$. On trouve la même conclusion que dans le chapitre 4 où le pneu roule sur la chaussée sans système suspendu. Sur la chaussée A , les tailles des aspérités sont plus grandes et plus variées par rapport à celles de la surface de chaussée $E2$. La force de résistance au roulement F_R dans le cas où le pneu roule sur la chaussée $E2$ est donc plus faible par rapport à celle du cas dans lequel le pneu roule sur la chaussée A .

5.3 Conclusions

Nous avons étendu le modèle présenté dans le chapitre précédent du contact d'un objet roulant sur une surface rugueuse en attachant cet objet à une masse représentant le quart de la masse d'un véhicule par l'intermédiaire d'une suspension composée d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle. Les équations des mouvements de l'objet roulant et de la masse attachée ont été écrites et font apparaître les forces de contact subies par l'objet roulant comme des excitations extérieures. On obtient ainsi un système d'équations dont la résolution permet de déterminer les mouvements de l'objet roulant et de la masse attachée ainsi que l'évolution des forces de contact sur les aspérités d'une surface de chaussée.

Comme dans le chapitre précédent, l'influence de la vitesse de roulement sur la force de résistance au roulement a été étudiée. Une comparaison a été faite avec la situation sans suspension pour une vitesse donnée et le résultat semble indiquer que la force de résistance au roulement en valeur absolue est plus grande dans le cas sans suspension que dans le cas avec suspension. Ensuite une étude a été menée sur le roulement sur une surface sinusoïdale et l'influence de la longueur d'onde a été analysée. Nous avons également fait varier la raideur du ressort et les résultats ont montré que la valeur maximale de la force de résistance au roulement décroît lorsque la valeur de raideur du ressort croît si cette valeur est supérieure à 10000 N. Enfin une application a été réalisée sur une surface de chaussée réelle.

Les calculs effectués dans ce chapitre ont montré les différents types d'analyse que le nouveau modèle permet de réaliser. Il semble prématuré d'apporter d'avantage de commentaires pertinents aux résultats car ils sont trop récents d'une part et loin d'être complets d'autre part. Pour mieux comprendre les phénomènes physiques et faire des analyses pertinentes, des calculs complémentaires doivent être effectués en faisant varier les différents paramètres. Il faut aussi faire des applications avec un modèle plus réaliste de pneu et de la suspension sur d'avantage de surfaces de chaussée réelle.

Conclusion générale et perspectives

Conclusions

Le transport routier consomme une très grande part de l'énergie issue de l'industrie pétrolière. La réduction de cette consommation d'énergie est donc un enjeu important pour le développement durable. Une partie significative de la dissipation d'énergie se produit dans le fonctionnement de l'amortisseur et au niveau du contact entre le pneu et la chaussée. En effet, à cause du comportement viscoélastique des patins de gomme et de la condition de roulement, un couple s'opposant au roulement est créé par rapport à l'axe de l'essieu. La force de résistance au roulement est définie classiquement comme ce couple divisé par le rayon de la roue.

Le contact entre un pneu et une chaussée peut être considéré en première approche comme des choc entre les patins de gomme et les aspérités à la surface de la chaussée. La solution analytique du contact entre une sphère rigide et un massif semi-infini viscoélastique a été établie par Ting [13] il y a plus de cinquante ans et cette solution a été récemment simplifiée par Williamson [12]. Cette solution est constituée de deux expressions, l'une pour le déplacement, l'autre pour la force de contact, toutes deux en fonction de l'évolution de l'aire contact. Par contre, la relation entre la force et le déplacement n'est pas explicite. Ceci est à l'origine des difficultés de l'utilisation de la solution analytique pour la résolution du problème de choc viscoélastique. Dans le chapitre 2, nous avons proposé un nouvel algorithme qui consiste à utiliser dans la phase de rebond des incrément constant du rayon de l'aire de contact pour éviter l'instabilité numérique. La force de pesanteur a été prise en compte.

Chapitre 3 est consacré à la modélisation du contact d'un objet roulant sur une surface lisse. Une suspension a été introduite. Elle est composée d'un ressort et d'un amortisseur en parallèle reliant l'objet roulant à une grande masse représentant une partie du véhicule supportée par la roue. Le problème de contact viscoélastique est transformé en un problème de contact élastique équivalent à chaque incrément de temps. La contribution de la pression de contact antérieure est transférée dans le second membre. Les équations des mouvements des deux masses ont été résolues en respectant la condition de contact unilatéral. La convergence de la méthode numérique ont été étudiée. Les résultats ont montré la dissymétrie de la distribution de la pression de contact dans la direction du roulement. Cette distribution de pression a servi pour le calcul de la force de résistance au roulement. L'influence de la vitesse de roulement sur la force de résistance au roulement a été analysée. Enfin, des calculs ont été effectués dans le cas du roulement sur une surface

sinusoïdale.

La modélisation du roulement sur une surface rugueuse a été présentée dans le chapitre 4. Nous avons proposé une approche linéarisée de l'approche multipoints pour le contact viscoélastique développée dans la thèse de G. Dubois [52] et nous avons introduit la condition de roulement. Cette approche prend en compte la loi de contact sur chaque aspérité de la surface rugueuse ainsi que l'interaction entre les aspérités. Comme dans le chapitre précédent, le problème de contact viscoélastique est transformé en un problème de contact élastique équivalent à chaque incrément de temps. Des simulations numériques ont été effectuées pour des surfaces rugueuses composées d'aspérités sphériques. L'influence de la taille des aspérités sur la force de résistance au roulement a été étudiée et les résultats numériques ont montré que la relation entre ces deux quantités est une fonction croissante. D'ailleurs, quand la taille des aspérités devient suffisamment petite, les résultats sont alors proches de ceux pour une surface lisse. Enfin, une application sur deux chaussées réelles a été réalisée et les résultats ont révélé la même tendance que pour les surfaces composées d'aspérités sphériques.

Dans le chapitre 5, nous avons couplé le modèle de contact en condition de roulement sur des surfaces rugueuses avec une suspension similaire à celle présentée dans le chapitre 3. Un système de $N + 2$ équations est obtenu, dont les inconnues sont les mouvements de l'objet roulant et de la masse qu'il supporte ainsi que les forces de réaction sur les N aspérités dans la zone de contact. Une comparaison a été faite avec le cas sans suspension et les résultats ont montré que la force de résistance au roulement est plus faible dans le cas avec la suspension que dans le cas sans suspension, en tout cas pour les valeurs de la vitesse de roulement utilisées. D'ailleurs, lorsque la valeur de la raideur du ressort est très élevée, les résultats dans les deux situations deviennent proches. Nous avons étudié également le roulement sur une surface sinusoïdale et l'influence de la longueur d'onde sur la force de résistance au roulement. Enfin, une application sur une chaussée réelle a été réalisée.

Perspectives

Dans le but de mieux comprendre le phénomène de contact de roulement d'un pneu sur des surfaces rugueuses, des calculs complémentaires doivent être effectués, avec un modèle de pneu et d'amortisseur plus réaliste. L'influence des différents paramètres tels que la vitesse de roulement, la raideur de la suspension, les longueurs d'onde de la texture de surface de chaussée, les propriétés viscoélastiques des patins de gomme doit être investie

dans le détail.

Au delà des calculs complémentaires à effectuer, une analyse énergétique du phénomène de contact de roulement viscoélastique reste à faire. Les modèles qui ont été construits dans cette thèse seront très utiles pour une telle analyse. Il faudra calculer l'énergie dissipée dans l'amortisseur et dans le pneu à la fois par la déformation viscoélastique quasi-statique et la vibration du pneu. Des études de corrélation entre le bruit de roulement et la résistance au roulement peuvent aussi être envisagées.

Bibliographie

- [1] V. Cerruti : Acc. Licei, Mem. Fis. Mat, Roma. 1882. [21](#)
- [2] H. Hertz : Uber die Berührung fester elastischer Korper. *Journal fur die reine und angewandte Mathematik (Crelles Journal)*, 1882(92) :156–171, 1882. ISSN 0075-4102. [15](#), [17](#), [21](#), [67](#), [78](#)
- [3] J. Boussinesq : *Application des potentiels à l'étude de l'équilibre et du mouvement des solides élastiques*. Gauthier-Villars, Paris, 1885. [16](#), [21](#)
- [4] A.E.H. Love : Boussinesq's problem for a rigid cone. *The Quarterly Journal of Mathematics*, os-10(1) :161–175, 1939. ISSN 0033-5606. [15](#)
- [5] A.E.H. Love : A treatise on the mathematical theory of elasticity. *Cambridge University Press*, 1952. [41](#)
- [6] D. Tabor : The mechanism of rolling friction. *Philos. Mag.*, 43 :1055–1059, 1952. [22](#), [37](#)
- [7] J.F. Archard : Elastic deformation and laws of friction. *Proc.R.Soc. London, Ser.A*, pages pp. 190–205, 1957. [22](#)
- [8] J.R.M. Radok : Visco-elastic stress analysis. *Q. App. Math.*, 15 :198, 1957. [17](#)
- [9] E.H. Lee and J.R.M. Radok : The contact problem for viscoelastic bodies. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 27 : :438–44, 1960. [22](#)
- [10] S. Hunter : The rolling contact of a rigid cylinder with a viscoelastic half-space. *ASME J. Appl. Mech.*, 28 :611–617, 1961. [37](#)
- [11] L. Morland : A plane problem of rolling contact in linear viscoelasticity theory. *ASME J. Appl. Mech.*, 29 :345–352, 1962. [37](#)
- [12] J.A. Greenwood and J.B.P. Williamson : Contact of nominally flat surfaces. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A. Mathematical and Physical Sciences*, 295(1442) :300–319, 1966. [22](#), [23](#), [25](#), [107](#)
- [13] T.C.T. Ting : The contact stresses between a rigid indenter and a viscoelastic half-space. *International Journal of Mechanical - of the ASME*, 35 : :845–54, 1966. [22](#), [25](#), [107](#)
- [14] G.A.C. Graham : The contact problem in the linear theory of viscoelasticity when the contact area has any number of maxima and minima. *International Journal of Engineering Sciences*, 5 :409, 1967. [22](#)
- [15] Bush : The elastic contact of a rough surface. *Wear*, Vol 35 :pp. 87–111, 1975. [22](#)
- [16] J.P. Zaniwski : Fuel Consumption related to Vehicle type and Road Conditions. *Transportation Research Record*, 702, 1979. [5](#)

- [17] A. Williams : Aspects of tyre/road properties relatable to driver comfort and safety, proc. *Human Factor in Transport Research*, vol. 1, 1980. 5
- [18] F.R. Ross : The Effect of Pavement Roughness on Vehicle Fuel Consumption, Research Unit, Materials Section, Division of Highways and Transportation Facilities, Wisconsin Department of Transportation. 1981. 5
- [19] J. Padovan and O. Paramadilok : Transient and steady state viscoelastic rolling contact. *Computers et Structures*, 20 (1-3) :545–553, 1985. 37
- [20] K.L. Johnson : *Contact mechanics*. Cambridge University Press, 1985. 8, 21, 22, 40, 44
- [21] J. Oden and T. Lin : On the general rolling contact problem for finite deformations of a viscoelastic cylinder. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 57 (3) :297–367, 1986. 37
- [22] G. Descornet : Road-Surface Influence on Tire Rolling Resistance. *Surface Characteristics of Roadways*. Meyer/Reichrt, editors, pages pp. 401–415, 1990. 7
- [23] H.W. Du Plessis, A.T. Visser and P.C. Curtayne : Fuel Consumption of Vehicule as Affected by Road-Surface Characteristics. *Surface Characteristics of Roadways*. Meyer/Reichrt, editors, pages pp. 480–496, 1990. 7
- [24] J.J. Kalker : Three-dimensional elastic bodies in rolling contact. *Vol. 2 of Solid mechanics and its applications*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, The Netherlands, 1990. 38, 40
- [25] R. Hill and B. Storakers : A concise treatment of axisymmetric indentation in elasticity. In Eason, G., Ogden, R.W., Editors, *Elasticity, mathematical methods and applications*, Chichester : Ellis Horwood, pages 199–210, 1990. 22
- [26] R. Laganier and J. Lucas : The Influence of Pavement Evenness and Macrotecture on Fuel Consumption. *Surface Characteristics of Roadways : International Research and Technologies*, pages pp 454–9, 1990. 5
- [27] R. Laganier and J. Lucas : The Influence of Pavement Evenness and Macrotecture on Fuel Consumption. *Surface Characteristics of Roadways*. Meyer/Reichrt, editors, pages pp. 460–479, 1990. 7
- [28] U. Sandberg : Road Macro and Megatecture Influence on Fuel Consumption, *Surface Characteristics of Roadways*. *International Research and Technologies*, 460 :79, 1990. 5, 7
- [29] J.J. Kalker : Viscoelastic multilayered cylinders rolling with dry friction. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 58(3) :666–679, 1991. 38
- [30] G. Wang and K. Knothe : Stress analysis for rolling contact between two viscoelastic cylinders. *Journal of Applied Mechanics - Transactions of the ASME*, 60(2) :310–317, 1993. 38

- [31] Th. Christophe, Y. Delanne et J.P. Serfass : Les caractéristiques de surface - Résistance au roulement , confort vibratoire et caractéristiques de surface. *Revue Générale des Routes et des Aérodrômes*, 708 :pp 13–7, 1993. 5
- [32] B. Sudret : Effect of Pavement Structure on Truck Fuel Consumption. Phase 2 : Seasonal test. *NRC, Canada*, 2000. 8
- [33] NRC : Effect of Pavement Structure on Truck Fuel Consumption. Phase 2 : Seasonal tests. 2000. 7
- [34] T. Mitchell : Techbrief : Westrack Track Roughness, Fuel Consumption and Maintenance Cost. FHWA-RD-00-052, 2000. 5
- [35] T.A. Laursen : Computational contact and impact mechanics : fundamentals of modeling interfacial phenomena in nonlinear finite element analysis. *Springer*, ISBN 9783540429067, 2002. 22
- [36] A. Sameur : *Modèle de Contact Pneumatique/Chaussée pour la Prédiction du Bruit de Roulement*. Thèse de doctorat, École Nationale des Ponts et Chaussées, 2004. vii, 13, 14, 15
- [37] U. Nackenhorst : The ALE-formulation of bodies in rolling contact : Theoretical foundations and finite element approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 193 (39-41) :4299–4322, 2004. 38
- [38] A.J.G. Nuttall, G. Lodewijks, A.J. Klein Breteler : Modelling rolling contact phenomena in a pouch belt conveyor system. *Wear*, 2005. vii, 8, 9, 10
- [39] M.S. Roovers, D.F. De Graaff and R.K.F. Van Moppes : Round Robin Test-Rolling Resistance/Energy Consumption. *Report DWW*, 2005-046. 7
- [40] J. A. Gonzalez and R. Abascal : Efficient stress evaluation of stationary viscoelastic rolling contact problems using the boundary element method : Application to viscoelastic coatings. *Engineering Analysis with Boundary Elements*, 30 (6) :426–434, 2006. 38
- [41] NRC-CNRC : Effect of Pavement Structure on Vehicle Fuel Consumption. Phase III, CSTT, HVT-TR-068. 2006. 7
- [42] X. Qiu : Full two-dimensional model for rolling resistance : hard cylinder on viscoelastic foundation of finite thickness. *Journal of Engineering Mechanics*, 132 (11) :1241–1251, 2006. 12
- [43] Goodyear Europe : Facteurs influant sur la consommation de carburant. 2007. 5
- [44] J. Cesbron : *Influence de la Texture de Chaussée sur le Bruit de Contact Pneumatique/Chaussée*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes-Université de Nantes, 2007. vii, ix, 14, 15, 16, 79, 80, 83

- [45] A. Perriot, COLAS : Route et énergie : Comment la chaussée peut peser sur la consommation des véhicules. 2008. [vii](#), [3](#), [4](#), [5](#)
- [46] I.F. Kozhevnikov, J. Cesbron, D. Duhamel, H.P. Yin, F. Anfosso-L'ed'ee : A new algorithm for computing the indentation of a rigid body of arbitrary shape on a viscoelastic half-space. *International Journal of Mechanical Sciences*, 50 (7) :1194–1202, 2008. [18](#), [41](#), [46](#)
- [47] M. Brinkmeier, U. Nackenhorst, S. Petersen, O. Von Estorff : A finite element approach for the simulation of tire rolling noise. *Journal of Sound and Vibration*, 309 (1-2) :20–39, 2008. [38](#)
- [48] U. Hammarstrom, R. Karlsson and H. Sorensen : Road surface effects on rolling resistance-coastdown measurements with uncertainty analysis in focus. Deliverable d5(a). Report of the VTI. 2008. [7](#)
- [49] J. Salençon : Viscoélasticité pour le calcul des structures. 2009. [vii](#), [24](#), [45](#)
- [50] O. Boujard : Contribution de la chaussée à la résistance au roulement. 2009. [vii](#), [6](#), [7](#)
- [51] U. Sandberg : MIRIAM-Models for rolling resistance In Road Infrastructure Asset Management system. 2009. [vii](#), [6](#)
- [52] G. Dubois : *Modèle de contact dynamique pneumatique/chaussée par approche multi-aspérités : application au bruit de roulement*. Thèse de doctorat, École Centrale de Nantes, 2012. [vii](#), [viii](#), [ix](#), [x](#), [14](#), [16](#), [17](#), [18](#), [19](#), [59](#), [60](#), [83](#), [84](#), [85](#), [102](#), [108](#)
- [53] Gérard-Philippe Zéhil and Henri P. Gavin : Simplified approaches to viscoelastic rolling resistance. *International Journal of Solids and Structures*, 2013. [vii](#), [12](#), [13](#)
- [54] Wikipédia : Mécanique des contacts- Wikipédia, l'encyclopédie libre. 2013. [vii](#), [23](#)
- [55] EC 1222 (2009) : Regulation (EC) no 1222/2009 of the European Parliament and of the Council of 25 November 2009 on the labelling of tyres with respect to fuel efficiency and other essential parameters. *Official Journal of the European Union*, L 342/46, EN 22.12.2009. [4](#)
- [56] P. Wriggers : Computational contact mechanics. John Wiley and Sons, 2002. [22](#)
- [57] Thomas J. Rudolph and Allen V. Reicks : Viscoelastic Indentation and Resistance to Motion of Conveyor Belts Using a Generalized Maxwell Model of the Backing Material. *Rubber Chemistry and Technology*, Vol. 79, No. 2 :pp. 307–319, May 2006. [vii](#), [10](#), [11](#), [12](#)